MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

UNTER MITWIRKUNG

VON

LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, MAX BORN, L. E. J. BROUWER, RICHARD COURANT, CONSTANTIN CARATHÉODORY, WALTHER V. DYCK, OTTO HÖLDER, THEODOR V. KÁRMÁN, CARL NEUMANN, ARNOLD SOMMERFELD

HERAUSGEGEBEN

VON

FELIX KLEIN
IN GÖTTINGEN

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

ALBERT EINSTEIN
IN BERLIN

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN.

85. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1922

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

UNTER MITWIRKUNG

VON

LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, MAX BORN, L. E. J. BROUWER, RICHARD COURANT, CONSTANTIN CARATHÉODORY, WALTHER v. DYCK, OTTO HÖLDER, THEODOR v. KÁRMÁN, CARL NEUMANN, ARNOLD SOMMERFELD

HERAUSGEGEBEN

VON

FELIX KLEIN

IN GÖTTINGEN

DAVID HILBERT

IN GÖTTINGEN

ALBERT EINSTEIN

IN BERLIN

OTTO BLUMENTHAL

IN AACHEN.

85. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1922

Inhalt des fünfundachtzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Inhaltsverzeichnis.

Max Noether †.

Am 13. Dezember 1921 ist Max Noether 77jährig in Erlangen gestorben. Die Mathematik verliert in ihm einen scharfsinnigen und tiefdenkenden Forscher, die Mathematischen Annalen betrauern eines ihrer tätigsten und einflußreichsten Redaktionsmitglieder. Als Clebsch zusammen mit Carl Neumann die Annalen gründete, war Noether ein hervorragendes Mitglied des Clebschschen Kreises, und seine Mitarbeit an unserer Zeitschrift setzte bereits mit dem zweiten Bande ein. Der größte und wichtigste Teil seines Lebenswerkes ist in ihr niedergelegt. Noether ist ein charakteristischer Vertreter der algebraisch-geometrischen Richtung, die in den siebziger Jahren im Anschluß an Clebsch und die Invariantentheorie in großer Blüte stand, dann in Deutschland allmählich abstarb, um in Italien wieder aufzuleben und eine überragende Stellung einzunehmen. Auf diese ganze Entwicklung hat Noether bestimmenden Einfluß geübt. Wie sehr die italienische Schule seine Meisterschaft anerkennt, beweist seine Ernennung zum Preisrichter bei der Verteilung der Guccia-Medaille im Jahre 1908.

Was Noether unter den Anhängern Clebschs ausgezeichnet hat, war sein Streben nach vollständiger, arithmetischer Begründung der algebraisch-geometrischen Schlußweisen, in Gegensatz zu manchen abzählenden oder anschauungsmäßigen Betrachtungen, deren man sich damals noch ohne Bedenken bediente. Gleich den Anfang seiner wissenschaftlichen Laufbahn bezeichnet die grundlegende Entdeckung in dieser Richtung, der berühmte „Noethersche Satz", der im sechsten Bande der Annalen veröffentlicht ist. Auf diesen Satz gestützt, folgte schon in Band 7 der Annalen die gemeinsam mit Brill verfaßte große Abhandlung „Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie", die klassische Darstellung der Lehre von den ebenen algebraischen Kurven, auf der alle weitere Entwicklung aufgebaut hat. Mit den gleichen Prinzipien hat Noether die Theorie der algebraischen Raumkurven behandelt und damit im Jahre 1882 den Steiner-Preis der Berliner Akademie, gleichzeitig mit Halphen, erworben. Auch die sehr viel schwierigere Theorie

der algebraischen Flächen hat Noether schon frühzeitig (Math. Ann. 2 u. 8) in Angriff genommen und die grundlegende Untersuchung über die gegenüber umkehrbar-eindeutigen Transformationen invarianten Gebilde ausgeführt, die zur Auffindung des tiefliegenden Kurvengeschlechtes neben dem bereits von Clebsch entdeckten Flächengeschlecht führten.

Als Noethers Endziel in der Theorie der ebenen algebraischen Kurven kann eine vollständige Theorie der Abelschen Integrale und ihrer Umkehrfunktionen hingestellt werden. Als Vorarbeiten können gelten: einmal wichtige Untersuchungen über die Eliminationsprozesse, besonders in der Arbeit „Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Funktionen" (Math. Ann. **23**), und andererseits die Betrachtungen „Zur Theorie der Thetafunktionen von beliebig vielen Argumenten" (Math. Ann. **16**), in der zum ersten Male die Thetacharakteristiken in zwei Arten eingeteilt werden, je nach der Substitutionengruppe, die ihre Beziehungen invariant läßt. Die abschließende „Theorie der Abelschen Differentialausdrücke und Funktionen" (Math. Ann. **37** u. **38**) fordert lebhaft zu einem Vergleich mit der, damals noch nicht veröffentlichten, Weierstraßschen Theorie heraus, die bemerkenswerterweise auf dem gleichen Grundelement aufbaut, nämlich der rationalen Funktion der Riemannschen Fläche mit einem variablen und p festen einfachen Polen. Noether vollendete sein algebraisch-geometrisches Werk durch den großen, eine ungeheure Fülle von Material kritisch bearbeitenden Bericht über die „Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit", den er im Jahre 1894 zusammen mit Brill der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstattet hat.

Im Jahre 1893, mit dem 42. Bande, ist Noether förmlich in die Annalenredaktion eingetreten. Für zweierlei Tätigkeit haben wir ihm zu danken. Einmal hat er uns bis zu dem jüngsten Band 84 immer wieder Arbeiten algebraisch-geometrischen Inhalts zugeführt, und manche wichtigen Veröffentlichungen, besonders italienischer Autoren, verdanken wir seiner glücklichen Initiative. Er war ein äußerst gewissenhafter und kritischer Redakteur, der mit schärfster Sorgfalt die seiner Begutachtung unterliegenden Arbeiten prüfte und mit der ihm eigenen Offenheit auf alle Mängel hinwies. Hierdurch hat er bei seiner tiefgehenden Beherrschung des Gebiets nicht nur unserer Zeitschrift, sondern auch vielen Verfassern wertvolle und anerkannte Dienste geleistet. Seine zweite Tätigkeit für die Annalen aber verdient noch mehr hervorgehoben zu werden. In umfassenden analytisch-kritischen Nachrufen hat er neun verstorbenen Mathematikern, ihm geistesverwandten Meistern, bedeutende Denkmäler gesetzt, die in ihrer Gesamtheit einen wichtigen Beitrag zur Geschichte

der neueren Mathematik bilden. Der letzte dieser Nachrufe, auf H. G. Zeuthen, ist im Mai 1921 im Bande 83 erschienen. Sie beweisen, ebenso wie der Bericht über die „Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen" Noethers feinen und scharfen historisch-kritischen Sinn.

Am 24. September 1914 sollte Noethers 70. Geburtstag festlich begangen werden. Seine mathematischen Freunde in Deutschland unter Führung der Annalenredaktion hatten eine Adresse vorbereitet; ebenso hatten die italienischen und die französischen Mathematiker ihm Ehrungen dargebracht: sie waren noch gerade eingetroffen, bevor der Krieg den Verkehr zwischen den Völkern unterband. Auch die Feier hat nicht in dem beabsichtigten Umfang stattfinden können. Aber Noether hat doch diese Beweise unserer Liebe und Hochschätzung erhalten und sich an ihnen gefreut, und unsere Liebe und Hochschätzung soll auch diese kurze Nachricht bezeugen, der wir einen ausführlichen Nachruf demnächst folgen lassen werden.

Die Redaktion der Mathematischen Annalen.

Über die Normenreste und Nichtreste in den allgemeinsten relativ-Abelschen Zahlkörpern.

Von

Kurt Hensel in Marburg.

Eine wichtige Frage der höheren Zahlentheorie ist die nach den Normenresten und Nichtresten eines Relativkörpers $K(x)$ zu einem beliebig gegebenen algebraischen Körper K.

In seinem Zahlberichte hat Hilbert diesen Begriff nur in den beiden einfachsten Fällen aufgestellt, daß der Relativkörper entweder ein quadratischer oder der sogenannte Kummersche Zahlkörper ist. Im ersten Falle hat er dort die Frage nach den Normenresten und Nichtresten vollständig, im zweiten nach ihrem wesentlichen Teile entschieden, aber auch diese ganz speziellen Aufgaben erforderten dort zu ihrer Lösung mit den Hilfsmitteln der Dedekindschen Idealtheorie recht schwierige und tiefliegende Untersuchungen.

In dieser und einer späteren sich an diese anschließenden Arbeit will ich den Begriff der Normenreste und Nichtreste in dem ganz allgemeinen Falle definieren, daß der Relativkörper $K(x)$ irgendein Abelscher Körper über einem ganz beliebigen algebraischen Körper K ist, und die Frage nach diesen Resten und Nichtresten in vollem Umfange lösen.

§ 1.

Das Normenrestproblem.

Gegeben sei ein beliebiger algebraischer Körper K und in ihm irgendeine reine Gleichung vom Primzahlgrade l:

$$x^l = A, \tag{1}$$

deren rechte Seite nur keine l-te Potenz ist. Ist x eine Wurzel derselben, so wird durch sie ein auflösbarer Körper $K(x)$ über K definiert. Derselbe ist dann und nur dann relativ-Abelsch in bezug auf K, wenn K die l-ten Einheitswurzeln enthält. Diese Voraussetzung werde im folgenden

als erfüllt angenommen. Alle relativ-Abelschen Körper über K können auf eine Kette solcher einfachen Erweiterungskörper zurückgeführt werden. Deshalb können und sollen nur diese im folgenden untersucht werden.

Es sei nun $\mathfrak{p}$ ein Primteiler des gegebenen Körpers K, welcher zu der reellen Primzahl p gehöre, e und f seien Ordnung und Grad von $\mathfrak{p}$, und π sei irgendeine Primzahl für den Bereich von $\mathfrak{p}$, d. h. eine genau durch $\mathfrak{p}$ teilbare Zahl von K. K ist ein Teilkörper des algebraischen Körpers $K(\mathfrak{p})$ aller π-adischen Zahlen, dessen Elemente nach ganzen Potenzen von π fortschreiten. Jede Zahl von K gehört auch zu $K(\mathfrak{p})$, und umgekehrt ist jede Zahl von $K(\mathfrak{p})$ der Grenzwert einer Reihe von Zahlen aus K.

Ferner sei $\mathfrak{P}$ einer der Primteiler von $\mathfrak{p}$ im Relativkörper $K(x)$; e_0 und f_0 mögen Relativordnung und Relativgrad von $\mathfrak{P}$ in bezug auf K bedeuten, und π_0 sei irgendeine Primzahl für den Bereich von $\mathfrak{P}$. Endlich sei $K(\mathfrak{P}, x)$ der algebraische Körper aller π_0-adischen Zahlen, zu dem $K(x)$ in derselben Beziehung steht, wie K zu $K(\mathfrak{p})$.

Eine Zahl B von K oder $K(\mathfrak{p})$ soll dann eine Normzahl oder ein Normenrest nach $\mathfrak{p}$ des Körpers $K(x)$ heißen, wenn

$$B = n(B_0) \quad (\mathfrak{p}) \tag{2}$$

gleich der Relativnorm einer Zahl B_0 des Körpers $K(\mathfrak{P}, x)$ ist. Ist diese Gleichung nicht erfüllt, so ist B keine Normzahl oder ein Normennichtrest nach $\mathfrak{p}$ jenes Relativkörpers.

Diese von mir neu eingeführte Definition der Normenreste und Nichtreste stimmt im Falle des quadratischen und des Kummerschen Zahlkörpers vollständig mit der von Hilbert gegebenen überein.

Es soll nun entschieden werden, welche Zahlen des Grundkörpers $K(\mathfrak{p})$ Normenreste, welche Nichtreste sind. Zunächst ist klar, daß jede l-te Potenz $\alpha^l = n(\alpha)$ einer beliebigen π-adischen Zahl des Bereiches $K(\mathfrak{p})$ eine Normzahl ist. Ferner ist das Produkt und der Quotient zweier Normzahlen wieder eine solche, da ja aus $B = n(B_0)$, $C = n(C_0)$ sofort $BC = n(B_0 C_0)$, $\frac{B}{C} = n\left(\frac{B_0}{C_0}\right)$ folgt. Ebenso leicht ergibt sich, daß das Produkt oder der Quotient einer Normzahl und einer Nichtnormzahl stets eine Nichtnormzahl ist.

Für die Zerlegung eines beliebigen Primteilers $\mathfrak{p}$ von K im Relativkörper $K(x)$ bestehen nun allein folgende drei Möglichkeiten[1]):

[1]) Vgl. meine Abhandlung „Die Zerlegung der Primteiler eines beliebigen Zahlkörpers in einem auflösbaren Oberkörper". Crelles Journal 151, S. 200–209. Ich werde diese Arbeit durch Cr. 151 zitieren.

1. Ist $A = A_0^l\ (\mathfrak{p})$ l-ter Potenzrest in K, so zerfällt $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_l$ in l voneinander verschiedene Primfaktoren in $K(x)$, deren Relativordnungen e_0 und Relativgrade f_0 alle gleich 1 sind. Die Relativdiskriminante D von $K(x)$ in bezug auf K ist nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar.

2. Ist die Relativdiskriminante D durch $\mathfrak{p}$ teilbar, so ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^l$ die l-te Potenz eines Primteilers, für welchen $e_0 = l$, $f_0 = 1$ ist.

3. Ist weder A l-ter Potenzrest noch $\mathfrak{p}$ ein Teiler der Relativdiskriminante, so bleibt $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}$ in $K(x)$ unzerlegbar, und hier ist $e_0 = 1$, $f_0 = l$.

Man kann nun im ersten Falle $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_l$ sofort zeigen, daß jede Zahl B von K Normzahl ist. Ist nämlich $\mathfrak{P}$ irgendeiner jener l Primfaktoren von $\mathfrak{p}$, so lehrt die allgemeine Theorie, daß man für den Bereich von $\mathfrak{P}$ stets eine Zahl B_0 so bestimmen kann, daß ihre l Konjugierten völlig beliebige Werte annehmen. Wählt man also B_0 so, daß ihre l Konjugierten der Reihe nach $B, 1, \ldots, 1$ sind, so ist in der Tat $B = n(B_0)$, und unsere Behauptung ist bewiesen.

Im zweiten und dritten Falle, welche hiernach nur noch allein zu betrachten sind, läßt sich das jetzt abzuleitende einfache und schöne Resultat auf die multiplikative eindeutige Darstellung gründen, welche, wie ich bewiesen habe[2]), für alle Zahlen eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers gilt. Für die Körper $K(\mathfrak{p})$ und $K(\mathfrak{P}, x)$ kann jene eindeutige Darstellbarkeit in dem folgenden Satze ausgesprochen werden:

Jede Zahl B des π-adischen Körpers $K(\mathfrak{p})$ läßt sich eindeutig in der folgenden Form darstellen:

$$B = \xi_1^{e_1} \xi_2^{e_2} \ldots \xi_r^{e_r} \quad (\mathfrak{p}). \tag{3}$$

A) Hier bedeutet $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ ein sogenanntes Fundamentalsystem von endlich vielen Elementen von $K(\mathfrak{p})$, welches auf mannigfache Art ausgewählt werden kann, und die Exponenten $e_1, e_2, \ldots, e_r$ sind gewisse ganze rationale oder ganze p-adische Zahlen, welche jedesmal durch die darzustellende Zahl B *eindeutig* bestimmt sind.

Ganz ebenso gilt für jede Zahl B_0 des π_0-adischen Körpers $K(\mathfrak{P}, x)$ eine eindeutige multiplikative Darstellung

$$B_0 = \xi_1^{(0)\,e_1^{(0)}} \xi_2^{(0)\,e_2^{(0)}} \ldots \xi_{r_0}^{(0)\,e_{r_0}^{(0)}} \quad (\mathfrak{P}), \tag{3a}$$

wo die Elemente $\xi_i^{(0)}$ und die Exponenten $e_i^{(0)}$ genau die entsprechende Bedeutung haben.

---

[2]) K. Hensel, Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers, Crelles Journal **146**, S. 189–215. Ich werde diese Abhandlung durch „Cr. 146" zitieren.

Man kann nun, wie ich im folgenden zeigen werde, das System $(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \xi_r)$ von vornherein so ausgewählt voraussetzen, daß alle und nur die Normzahlen $\overline{B} = n(B_0)$ von $K(\mathfrak{p})$ in der Form:

$$\overline{B} = n(B_0) = \xi_1^{\bar{e}_1}\, \xi_2^{\bar{e}_2} \ldots \xi_{r-1}^{\bar{e}_{r-1}}\, \alpha^l$$

enthalten sind, wenn die $\bar{e}_i$ dieselbe Bedeutung haben, wie die e_i, und α^l eine beliebige l-te Potenz in $K(\mathfrak{p})$ bedeutet. Ist dieser Satz einmal bewiesen, so folgt aus ihm unmittelbar das Fundamentaltheorem:

> Eine Zahl $B = \xi_1^{e_1} \ldots \xi_{r-1}^{e_{r-1}}\, \xi_r^{e_r}$ ist dann und nur dann eine Normzahl, wenn ihr letzter Exponent $e_r = l\,\bar{e}_r$ ein Multiplum von l ist.

Ist dies nämlich der Fall, so ist ja

$$B = (\xi_1^{e_1} \ldots \xi_{r-1}^{e_{r-1}})(\xi_r^{\bar{e}_r})^l$$

nach dem obigen Satze eine Normzahl.

Soll umgekehrt $B = n(B_0)$ sein, so muß nach demselben Satz:

$$B = \xi_1^{e_1} \ldots \xi_{r-1}^{e_{r-1}}\, \xi_r^{e_r} = \xi_1^{\bar{e}_1} \ldots \xi_{r-1}^{\bar{e}_{r-1}}\, \alpha^l,$$

also

$$\xi_1^{e_1-\bar{e}_1}\, \xi_2^{e_2-\bar{e}_2} \ldots \xi_{r-1}^{e_{r-1}-\bar{e}_{r-1}}\, \xi_r^{e_r} = \alpha^l$$

eine l-te Potenz sein, und dies ist wegen der eindeutigen Darstellbarkeit von α^l durch das Fundamentalsystem $(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \xi_r)$ nur dann der Fall, wenn jeder der r Exponenten links, wenn also speziell der letzte Exponent $e_r = l\,\bar{e}_r$ ein Vielfaches von l ist.

Hiernach ist also nur der obige Satz allgemein zu beweisen. Ich kann und werde ihn durch das folgende Theorem ersetzen, welches nur ein anderer Ausdruck desselben ist:

(B) Die beiden Fundamentalsysteme $(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \xi_r)$ und $(\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_{r_0}^{(0)})$ für die Körper $K(\mathfrak{p})$ und $K(\mathfrak{P}, x)$ können stets so gewählt werden, daß:

1. die $r-1$ ersten Elemente $\xi_1 \ldots \xi_{r-1}$ sämtlich Normzahlen sind,
2. daß die Norm eines jeden Elementes $\xi_i^{(0)}$ des zweiten Systems in der Form $\xi_1^{\bar{e}_1} \ldots \xi_{r-1}^{\bar{e}_{r-1}}\, \alpha^l$ enthalten ist.

In der Tat folgt ja aus der ersten Tatsache, daß *alle* Produkte $\xi_1^{\bar{e}_1} \ldots \xi_{r-1}^{\bar{e}_{r-1}}\, \alpha$ Normzahlen sind, und aus der zweiten, daß umgekehrt die Norm eines jeden Elementes von $K(\mathfrak{P}, x)$ in dieser Form enthalten ist.

Im folgenden ist also nur noch der Satz (B) über die Beziehung von zwei geeignet ausgewählten Fundamentalsystemen $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ und $(\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_{r_0}^{(0)})$ zu beweisen.

Wie ich in der Abhandlung Cr. 146 gezeigt habe, ist nun ein Fundamentalsystem für den Körper $K(\mathfrak{p})$ das folgende:

(4) $$(\pi, \omega, \omega', \eta_1, \ldots, \eta_\mu).$$

Hier bedeutet ω eine primitive l^n-te Einheitswurzel höchsten Grades aus $K(\mathfrak{p})$; da nach unserer Voraussetzung K wenigstens die l-ten Einheitswurzeln enthalten muß, so ist n mindestens gleich Eins. Ferner ist ω' eine primitive Einheitswurzel höchsten Grades aus $K(\mathfrak{p})$, deren Wurzelexponent Q durch l nicht teilbar ist. Endlich ist $\eta_1, \ldots, \eta_\mu$ ein bestimmt ausgewähltes System von $\mu = ef$ Einseinheiten

$$\eta = 1 - w\pi^k + \ldots,$$

deren Ordnungszahl k eine bestimmte Reihe von positiven, ganzen Zahlen durchläuft. Jedes Element B von $K(\mathfrak{p})$ ist dann nach dem Satze (A) eindeutig in der Form

(5) $$B = \pi^c \omega^d \omega'^{d'} \eta_1^{g_1} \ldots \eta_\mu^{g_\mu}$$

darstellbar; hier kann c, die Ordnungszahl von B, alle ganzzahligen Werte annehmen, während d alle Werte $(0, 1, \ldots, l^n - 1)$, d' alle Werte $(0, 1, \ldots, Q-1)$ haben kann; die Exponenten $g_1, \ldots, g_\mu$ endlich sind eindeutig bestimmte ganze p-adische Zahlen.

Ebenso ist für den Relativkörper $K(\mathfrak{P}, x)$

$$(\pi_0, \omega_0, \omega_0', \eta_1^{(0)}, \ldots, \eta_{\mu_0}^{(0)})$$

ein Fundamentalsystem, wo genau wie vorher ω_0 eine primitive l^{n_0}-te Einheitswurzel höchster Ordnung aus $K(\mathfrak{P}, x)$, ω_0' eine primitive Q_0-te Einheitswurzel höchsten Grades aus demselben Körper bedeutet, deren Grad Q_0 l nicht enthält, und wo $\eta_1^{(0)}, \ldots, \eta_{\mu_0}^{(0)}$ bestimmte Einseinheiten aus $K(\mathfrak{P}, x)$ sind. Jedes Element B_0 von $K(\mathfrak{P}, x)$ ist eindeutig in der Form

(5a) $$B_0 = \pi_0^{c_0} \omega_0^{d_0} \omega_0'^{d_0'} \eta_1^{(0)g_1^{(0)}} \ldots \eta_{\mu_0}^{(0)g_{\mu_0}^{(0)}}$$

darstellbar, wo die Exponenten die entsprechenden Werte annehmen können, wie oben.

Im folgenden werde ich nun zeigen, daß und wie diese beiden Fundamentalsysteme

$$(\pi, \omega, \omega', \eta_1, \ldots, \eta_\mu) \quad \text{und} \quad (\pi_0, \omega_0, \omega_0', \eta_1^{(0)}, \ldots, \eta_{\mu_0}^{(0)}),$$

in äquivalente umgeformt werden können, welche die beiden in (1) und (2) des Satzes (B) angegebenen Eigenschaften besitzen.

Zunächst können aus diesen Systemen offenbar diejenigen Elemente fortgelassen werden, welche jene beiden Eigenschaften bereits haben. Deshalb können bereits die beiden Einheitswurzeln ω' und ω_0' sicher aus-

scheiden; da nämlich Q und Q_0 l nicht enthalten, so kann man l' und l'_0 so wählen, daß $ll' \equiv 1 \pmod{Q}$, $ll'_0 \equiv 1 \pmod{Q_0}$ sind. Dann ist aber

$$\omega' = \left(\omega'^{l'}\right)^l, \qquad n(\omega'_0) = \left(n(\omega_0'^{l'_0})\right)^l,$$

d. h. ω' ist eine Normzahl und $n(\omega'_0)$ ist in der in (B) 2. angegebenen Form enthalten.

§ 2.

Die Lösung des Normenrestproblems im Falle $p \gtrless l$.

Den vollständigen Beweis des Satzes (B) gebe ich in dieser Arbeit für alle diejenigen Primteiler $\mathfrak{p}$, deren zugehörige reelle Primzahlen p von l verschieden sind, also für alle unendlich vielen Primteiler $\mathfrak{p}$ mit einziger Ausnahme der Primteiler $\mathfrak{l}$ des Wurzelexponenten l.

In diesem Falle können in den beiden jetzt noch zu betrachtenden Systemen:

$$(\pi, \omega, \eta_1, \ldots, \eta_\mu) \quad \text{und} \quad (\pi_0, \omega_0, \eta_1^{(0)}, \ldots, \eta_{\mu_0}^{(0)})$$

auch alle Einseinheiten η_i und $\eta_i^{(0)}$ fortgelassen werden, weil jedes η_i eine Normzahl und jede $n(\eta_i^{(0)}) = \alpha^l$ eine l-te Potenz ist. Ist nämlich l' die ganze p-adische Zahl, für welche $ll' = 1$ (p) wird, so ist ja:

(6) $$\eta_i = \left(\eta_i^{l'}\right)^l \quad \text{und} \quad n(\eta_i^{(0)}) = \left(n(\eta_i^{(0)l'})\right)^l \ (\mathfrak{P}).$$

Hier ist also nur zu beweisen, daß die beiden Systeme (π, ω) und (π_0, ω_0) durch zwei äquivalente $(\bar\pi, \bar\omega)$ und $(\bar\pi_0, \bar\omega_0)$ ersetzt werden können, welche den Forderungen 1. und 2. des Satzes (B) entsprechen.

Die Durchführung dieser Untersuchung führt nun zu dem folgenden einfachen Satze, welcher die wichtigsten Eigenschaften aller Normenreste und Nichtreste unmittelbar erkennen läßt:

(C) Sind

$$A = \pi^a \omega^b \omega'^{b'} \eta_1^{e_1} \ldots \eta_\mu^{e_\mu}, \qquad B = \pi^c \omega^d \omega'^{d'} \eta_1^{g_1} \ldots \eta_\mu^{g_\mu}$$

zwei beliebige Zahlen aus K, welche für den Bereich von $\mathfrak{p}$ durch ein beliebiges Fundamentalsystem multiplikativ dargestellt sind, so ist B dann und nur dann Normenrest nach $\mathfrak{p}$ des Körpers $K(\mathfrak{P}, \sqrt[l]{A})$, wenn die Determinante

(7) $$\begin{Bmatrix} a, b \\ c, d \end{Bmatrix} = ad - bc$$

der beiden ersten Exponenten von A und B durch l teilbar ist. Im Falle $l = 2$ tritt an die Stelle der Determinante die Zahl

(7a) $$\begin{Bmatrix} a, b \\ c, d \end{Bmatrix} = ad - bc + 2^{n-1} ac,$$

welche also für $n > 1$ auch durch die Determinante ersetzt werden kann.

Dieser Satz ist richtig, wenn A l-ter Potenzrest ist, wenn also a und b beide durch l teilbar sind, denn in diesem Falle ist ja die Zahl $\begin{Bmatrix} a, b \\ c, d \end{Bmatrix}$ für jedes B ein Multiplum von l, und andererseits ist nach dem oben geführten Beweise in diesem ersten Falle jedes B Normenrest.

Sind nun a und b nicht beide Vielfache von l, und ist zuerst $a \equiv 0$ also $b \not\equiv 0 \pmod{l}$, so bleibt nach den Ausführungen in Cr. 151 π Primzahl auch in $K(\mathfrak{P}, x)$, während an die Stelle der l^n-ten Einheitswurzel ω im Relativkörper eine l^{n_0}-te Einheitswurzel ω_0 von höherem Grade tritt. Hier sind also (π, ω) und (π, ω_0) je ein Basissystem für $K(\mathfrak{p})$ und $K(\mathfrak{P}, x)$, und man zeigt leicht, daß das zweite bereits der Bedingung (2) des Satzes B genügt. In der Tat ist $n(\pi) = \pi^l$ eine l-te Potenz und $n(\omega_0)$ ist als Einheit in $K(\mathfrak{p})$ sicher von der Form $\omega^h \alpha^l$. Andererseits werde ich gleich nachweisen, daß das zweite Element ω des ersten Systems (π, ω) stets eine Normzahl ist, daß somit dieses erste System die erste Bedingung des Satzes B erfüllt. Damit ist dann bewiesen, daß eine Zahl $B = \pi^c \omega^d \beta^l$ dann und nur dann eine Normzahl ist, wenn c, oder, was hier dasselbe ist, wenn $\begin{Bmatrix} a, b \\ c, d \end{Bmatrix} = ad - bc$ bzw. $ad - bc + 2^{n-1} ac$ durch l bzw. durch 2 teilbar ist.

Es ist hiernach nur noch zu zeigen, daß in diesem Falle $\omega = n(\bar{\omega}_0)$ stets eine Normzahl ist. Da hier a durch l teilbar, also π^a eine l-te Potenz ist, so läßt sich die Grundgleichung in der Form

$$x^l = \omega^b \bar{\alpha}^l$$

schreiben. Ist also $bb' \equiv 1 \pmod{l}$, so folgt aus ihr

$$(x^{b'})^l = \omega \alpha^l,$$

und hieraus ergibt sich

$$\bar{\omega}_0^l = \omega, \tag{8}$$

wenn $\bar{\omega}_0 = \frac{x^{b'}}{\alpha}$ gesetzt wird. Für irgendein ungerades l ist also $\omega = n(\bar{\omega}_0)$ eine Normzahl.

Ist dagegen $l = 2$, so wird die obige Gleichung (8)

$$\bar{\omega}_0^2 = \omega, \tag{8a}$$

d. h. es wird $n(\bar{\omega}_0) = -\omega$. Ist aber hier $2^n > 2$, enthält also $K(\mathfrak{p})$ wenigstens die vierte Einheitswurzel i, so kann diese letzte Gleichung, da $\omega^{2^{n-1}} = -1$ ist, in der Form

$$n(\bar{\omega}_0) = (\omega^{2^{n-2}})^2 \omega$$

geschrieben werden, und aus ihr ergibt sich für $\bar{\omega}_0' = \frac{\bar{\omega}_0}{\omega^{2^{n-2}}}$

$$n(\bar{\omega}_0') = \omega, \tag{8b}$$

d. h. ω ist auch in diesem Falle Normzahl.

Dieser Schluß ist allein in dem Falle $n = 1$ nicht anwendbar, dem Falle also, wo $K(\mathfrak{p})$ allein die primitive zweite Einheitswurzel -1, nicht aber die vierte Einheitswurzel i enthält. Hier bestimmt sich also das primitive Element $\bar{\omega}_0$ aus der Gleichung

$$\bar{\omega}_0^2 = -1 \tag{8c}$$

als i. Jede Einheit von $K(\mathfrak{P}, x)$ ist also in der Form $\alpha + \beta i$ enthalten, wo α und β ganze Zahlen des Körpers $K(\mathfrak{p})$ sind. Auch in diesem Falle kann $\bar{\omega}_0' = \alpha + \beta i$ stets so bestimmt werden, daß

$$-1 = n(\bar{\omega}_0') = n(\alpha + \beta i) = \alpha^2 + \beta^2$$

wird, d. h. auch hier ist -1 eine Normzahl. Denn diese Gleichung hat, wie bekannt und leicht zu beweisen ist[3]), sogar schon im Körper $K(p)$ der rationalen p-adischen Zahlen, also sicher auch im Oberkörper $K(\mathfrak{p})$ der π-adischen Zahlen eine Lösung. Hiermit ist also der Beweis unseres Satzes (C) im Falle eines durch l teilbaren a vollständig geführt.

Es sei endlich $a \not\equiv 0 \pmod{l}$, b beliebig, so ist ω auch in dem höheren Körper $K(\mathfrak{P}, x)$ die l^r-te Einheitswurzel höchsten Grades, dagegen bleibt π in diesem Erweiterungskörper nicht Primzahl. In diesem Falle kann man nämlich A in der Form schreiben

$$A = \pi^a \omega^b \alpha^l = (\pi \omega^{ba'} \alpha_0^l)^a = \bar{\pi}^a \quad (\mathfrak{p}),$$

wo jetzt $aa' \equiv 1 \pmod{l}$ ist, und α_0^l wieder eine l-te Potenz in $K(\mathfrak{p})$ bedeutet. Hier ist

$$\bar{\pi} = \pi \omega^{ba'} \alpha_0^l \tag{9}$$

eine neue Primzahl in $K(\mathfrak{p})$, welche nun für jedes ungerade l stets eine Normzahl ist. Schreibt man nämlich die Grundgleichung $x^l = \bar{\pi}^a$ in der Form

$$(x^{a'})^l = \bar{\pi}^{aa'} = \bar{\pi}\bar{\alpha}^l$$

und setzt dann $\frac{x^{a'}}{\bar{\alpha}} = \bar{\pi}_0$ so geht sie über in

$$\bar{\pi}_0^l = \bar{\pi}; \tag{9a}$$

für ein ungerades l ist also $\bar{\pi} = n(\bar{\pi}_0)$ Normzahl und $\bar{\pi}_0$ ist Primzahl im Erweiterungskörper $K(\mathfrak{P}, x)$.

Für $l = 2$ können wir, da ja $\omega^{2^{n-1}} = -1$ ist, die Gleichung (9) in der Form schreiben:

$$\bar{\pi}_0^2 = \bar{\pi} = -\omega^{2^{n-1}} \bar{\pi} = -\bar{\pi}, \tag{9b}$$

---

[3]) Vgl. z. B. K. Hensel, Zahlentheorie, S. 306–307 für $D = -1$.

wenn wir die neue Primzahl in $K(\mathfrak{p})$

$$\bar{\pi}\omega^{2^{n-1}} = \pi \tag{9c}$$

setzen; für diese Primzahl $\tilde{\pi}_0$ innerhalb $K(\mathfrak{P}, x)$ ist also ebenfalls $n(\tilde{\pi}_0) = \tilde{\pi}$.

In beiden Fällen genügen nun die beiden Systeme $(\bar{\pi}, \omega)$, (π_0, ω) bzw. für $l = 2$ $(\tilde{\pi}, \omega)$, $(\tilde{\pi}_0, \omega)$ den beiden Forderungen (1) und (2) des Satzes (B). In der Tat ist ja erstens $\bar{\pi}$ bzw. $\tilde{\pi}$ eine Normzahl, und zweitens gilt für die Elemente (π_0, ω) bzw. $(\tilde{\pi}_0, \omega)$ der beiden zweiten Systeme der Normdarstellung

$$n(\pi_0) = \bar{\pi}, \quad n(\omega) = \omega^l, \quad \text{bzw.} \quad n(\tilde{\pi}_0) = \tilde{\pi}, \quad n(\omega) = \omega^2.$$

Hieraus ergibt sich also, daß ein in der Form

$$B = \bar{\pi}^{\bar{c}}\omega^{\bar{d}} \qquad \text{oder} \qquad B = \tilde{\pi}^{\tilde{c}}\omega^{\tilde{d}}$$

dargestelltes Element B dann und nur dann Normzahl ist, wenn $\bar{d}$ durch l, bzw. $\tilde{d}$ durch 2 teilbar ist. Nun ist in den beiden unterschiedenen Fällen, daß l ungerade oder daß $l = 2$ ist nach (9) und (9c)

$$\begin{aligned} B &= \pi^c\omega^d\beta^l = (\bar{\pi}\omega^{-ba'}\alpha_0^{-l})^c\omega^d\beta^l = \pi^c\omega^{d-a'bc}\bar{\beta}^l \quad \text{bzw.} \\ B &= \pi^c\omega^d\beta^2 = (\tilde{\pi}\omega^{-ba'-2^{n-1}}\alpha_0^{-2})^c\omega^d\beta^2 = \tilde{\pi}^c\omega^{d-a'bc-c\cdot 2^{n-1}}\bar{\beta}^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Also ist B dann und nur dann Normzahl, wenn

$$\begin{aligned} &d - a'bc \equiv a'(ad - bc) \equiv a'\begin{Bmatrix} a, b \\ c, d \end{Bmatrix} \equiv 0 \pmod{l} \\ &d - a'bc - c2^{n-1} \equiv a'((ad - bc) + ac2^{n-1}) \equiv a'\begin{Bmatrix} a, b \\ c, d \end{Bmatrix} \equiv 0 \pmod{2} \end{aligned} \tag{10a}$$

ist, und damit ist der obige Satz in seinem vollen Umfange bewiesen.

Für jeden nicht in l enthaltenen Primteiler $\mathfrak{p}$ in K will ich nun den Normenrestcharakter $\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\}$ von B in bezug auf A durch die Gleichung

$$\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\} = \zeta^{\begin{Bmatrix} a, b \\ c, d \end{Bmatrix}} \tag{11}$$

definieren, wo ζ eine primitive l-te Einheitswurzel bedeutet, und der Exponent die in (7) und (7a) angegebene Bedeutung

$$ad - bc \qquad \text{oder} \qquad ad - bc + 2^{n-1}ac$$

hat, je nachdem $\mathfrak{p}$ zu einer ungeraden Primzahl p oder zu 2 gehört. Ich rechne dann alle diejenigen Zahlen $B, B', \ldots$ in dieselbe Normenrestklasse in bezug auf A, für welche jener Charakter denselben Wert hat. So ordnen sich alle Zahlen B von $K(p)$ in l Klassen; alle und nur die Normenreste in bezug auf A gehören der Hauptklasse an, für welche jenes Symbol gleich 1 ist.

Aus den beiden elementaren Eigenschaften

$$\begin{Bmatrix} a\,b \\ c\,d \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c\,d \\ a\,b \end{Bmatrix} = 0 \text{ bzw. } \equiv 0 \pmod 2$$

$$\begin{Bmatrix} a & b \\ c_1 & d_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} a & b \\ c_2 & d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a, & b \\ c_1 + c_2, & d_1 + d_2 \end{Bmatrix},$$

welche unser Symbol offenbar besitzt, da $2^{\varkappa}$ immer gerade ist, ergeben sich unmittelbar die beiden Fundamentalsätze für das Normenrestsymbol, der Vertauschungssatz und der Zerlegungssatz

$$\left\{\frac{B, A}{\mathfrak{p}}\right\}\left\{\frac{A, B}{\mathfrak{p}}\right\} = 1,$$

$$(12) \qquad \left\{\frac{B_1, A}{\mathfrak{p}}\right\} \cdot \left\{\frac{B_2, A}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{B_1 B_2, A}{\mathfrak{p}}\right\},$$

sowie der entsprechende für die Zerlegung $A = A_1 A_2$ des zweiten Elementes. Aus dem ersten Satze folgt, daß B dann und nur dann Normzahl im Körper $K(\sqrt[l]{A})$ ist, wenn A Normzahl in $K(\sqrt[l]{B})$ ist.

Wörtlich dieselben Ergebnisse erhält man in dem Falle, daß $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}$ einer der Primteiler von dem Grade l der Grundgleichung ist. Hierauf werde ich in der oben erwähnten zweiten Arbeit eingehen.

Marburg, den 5. Dezember 1921.

(Eingegangen am 16. 12. 1921.)

Kummers Kriterium zum letzten Theorem von Fermat.

Von

Rudolf Fueter in Zürich.

In seinem „Zahlbericht"[1]) hat Hilbert die Kummerschen Gedanken und Ansätze in allen Punkten herausgearbeitet, vervollständigt und weiter entwickelt. Nur das Kummersche Kriterium der Lösung des Fermatschen Problems für den Fall, daß die rationalen Zahlen zugrunde gelegt werden, ist von ihm nicht wiedergegeben worden[2]). Ich möchte im folgenden zeigen, wie alle notwendigen Sätze zur Herleitung des Kummerschen Resultates sich im Zahlbericht finden, und wie mit wenigen Strichen aus denselben das Kriterium von Kummer entspringt. Ja, noch mehr! Auch die Mirimanoffsche Form und das Wieferich-Furtwänglersche Kriterium ergeben sich sofort, wobei für letzteres viel weniger als das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz notwendig ist. Ich füge noch neue Formen des Kriteriums an, die mir interessant erscheinen.

1.

Angenommen, es gäbe drei ganze rationale, teilerfremde von 0 verschiedene Zahlen a, b, c, so daß für eine ungerade Primzahl l:

$$a^l + b^l + c^l = 0$$

erfüllt ist, so ist

$$(a + b\zeta^i) = \mathfrak{a}_i^l \quad \text{oder} \quad = \mathfrak{l}\mathfrak{a}_i^l \quad (i = 1, 2, \ldots, l-1),$$

je nachdem c zu l prim oder durch l teilbar ist[3]). Dabei ist $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{l}}$ die l-te Einheitswurzel, $\mathfrak{l}$ das Ideal $(1-\zeta)$ und $\mathfrak{a}_i$ ein Ideal von $k(\zeta)$. Ich setze

$$\mu = a + b\zeta \quad \text{oder} \quad \frac{a + b\zeta}{\zeta - 1};$$

---

[1]) „Die Theorie der algebraischen Zahlkörper." Bericht erstattet der D. Math. Ver. 4 (Berlin, Reimer, 1897), S. 175 u. ff.

[2]) Zahlbericht, S. 523.

[3]) Zahlbericht, S. 518 und 521.

je nachdem c zu l prim ist oder nicht. Dann ist

$$(\mu) = \mathfrak{a}^l.$$

Es sei r eine Primitivzahl $(\mathrm{mod}\, l)$, $s = (\zeta : \zeta^r)$ die Grundsubstitution des zyklischen Körpers $k(\zeta)$, r_n der kleinste positive Rest von r^n $(\mathrm{mod}\, l)$.[4]) Bei Benutzung symbolischer Potenzen[5]) wird:

$$\Psi = \mu^{r_0 + r_{-1}s + \dots + r_{-l+2}s^{l-2}}$$

$$\Psi^{s-r} = \mu^{(s-r)(r_0 + r_{-1}s + \dots + r_{-l+2}s^{l-2})} = \mu^{-l(q_0 + q_{-1}s + \dots + q_{-l+2}s^{l-2})},$$

wo die $q_{-i} = \frac{r r_{-i} - r_{-i+1}}{l}$ ganze positive Zahlen sind[6]).

2.

Da Ψ^{r-s} l-te Potenz einer Zahl von $k(\zeta)$ ist, so ergibt

$$x = \sqrt[l]{\Psi} + \sqrt[l]{s\Psi} + \dots + \sqrt[l]{s^{l-2}\Psi}.$$

bei richtiger Definition der Wurzeln, einen *absolut Abelschen Körper l-ten Grades $K(x)$*, oder eine *rationale Zahl* (falls Ψ selbst l-te Potenz in $k(\zeta)$ ist).

Die *Diskriminante* von $K(x)$ ist *nur durch l teilbar* oder Null. Denn wegen $(\mu) = \mathfrak{a}^l$ ist:

$$(\Psi) = \mathfrak{b}^l,$$

wo $\mathfrak{b}$ ein Ideal in $k(\zeta)$ ist. Jedes Primideal ist in Ψ daher zu einer durch l teilbaren Potenz enthalten[7]).

Nun gibt es aber nur *einen* Abelschen Körper mit dem Grad l und einer nur durch l teilbaren Diskriminante[8]), nämlich den Unterkörper der l^2-ten Einheitswurzeln:

$$y = \sqrt[l]{\zeta} + \sqrt[l]{\zeta^r} + \dots + \sqrt[l]{\zeta^{r^{l-2}}}.$$

Also muß:

$$\underline{\Psi = \mu^{r_0 + r_{-1}s + \dots + r_{-l+2}s^{l-2}} = \zeta^g \alpha^l,} \tag{I.}$$

wo α eine Zahl von $k(\zeta)$ ist. Ist $g = 0$, so ist x eine rationale Zahl.

3.

Kriterium von Wieferich-Furtwängler. Dies folgt sofort aus (I). Nimmt man c zu l prim an, was man immer kann, so ist auch $(a + b)$ zu l prim und

[4]) Zahlbericht, S. 358.

[5]) Zahlbericht, S. 271.

[6]) Zahlbericht, S. 360.

[7]) Furtwängler, Über das Reziprozitäts-Ges. der l-ten Potenzreste. Abhdl. Gött. Ges. Wiss. 2, 3 (1902), S. 7.

[8]) Zahlbericht, S. 346 Hilfssatz 18.

$$(a+b)^{r_0+r_{-1}+\cdots+r_{-l+2}} = (a+b)^{l\cdot\frac{l-1}{2}}$$

$$\frac{\Psi}{(a+b)^{l\cdot\frac{l-1}{2}}} = \left(\frac{a+b\zeta}{a+b}\right)^{r_0+r_{-1}s+\cdots+r_{-l+2}s^{l-2}} = \zeta^g \bar{\alpha}^l,$$

wo $\bar{\alpha} = \dfrac{\alpha}{(a+b)^{\frac{l-1}{2}}}$ wieder eine Zahl von $k(\zeta)$ ist. Nun ist:

$$\frac{a+b\zeta}{a+b} = 1 + \frac{b}{a+b}(\zeta-1) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}},\quad \zeta^g \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}},$$

also:

$$\bar{\alpha}^l \equiv \bar{\alpha} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}}$$

und

$$\bar{\alpha}^l \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}^l}.$$

Somit folgt aus obiger Gleichung die Kongruenz:

$$\left(1+\frac{b}{a+b}(\zeta-1)\right)^{r_0+r_{-1}s+\cdots+r_{-l+2}s^{l-2}} \equiv \zeta^g \equiv 1 + g(\zeta-1) \pmod{\mathfrak{l}^2}.$$

Entwickelt man links nach Potenzen von $(\zeta-1)$, so ist der Koeffizient von $(\zeta-1)$ kongruent $(l-1)\dfrac{b}{a+b} \pmod{l}$; also:

$$g \equiv -\frac{b}{a+b} \pmod{l}.$$

Ist auch $b \not\equiv 0 \pmod{l}$, was man immer annehmen darf, so ist

$$g \not\equiv 0 \pmod{l}.$$

Ist p irgendeine in b enthaltene Primzahl, so ist für jedes in (p) enthaltene Primideal $\mathfrak{p}$:

$$\Psi \equiv a^{r_0+r_{-1}+\cdots+r_{-l+2}} \equiv a^{\frac{l(l-1)}{2}} \equiv \zeta^g \alpha^l \pmod{\mathfrak{p}},$$

oder nach dem Fermatschen Satze:

$$\Psi^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l}} \equiv a^{\frac{l-1}{2}(n(\mathfrak{p})-1)} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Andererseits:

$$(\zeta^g\alpha^l)^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l}} \equiv \zeta^{g\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l}} \cdot \alpha^{n(\mathfrak{p})-1} \equiv \zeta^{g\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l}} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Also:

$$\zeta^{g\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Nun enthält $\zeta^n - 1$, für $n \not\equiv 0 \pmod{l}$ nur das Primideal $\mathfrak{l} + \mathfrak{p}$. Also muß

$$g\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l} \equiv 0 \pmod{l} \qquad \text{oder} \qquad \frac{n(\mathfrak{p})-1}{l} \equiv 0 \pmod{l}$$

sein. Dies gilt für jede in einer der drei zu l primen Zahlen a, b, c auf-

gehenden Primzahl p, ist also das gesuchte Kriterium in der Furtwänglerschen Form[9]).

4.

Wird μ in Primideale zerlegt:

$$(\mu) = \mathfrak{p}_1^l \mathfrak{p}_2^l \dots \mathfrak{p}_n^l,$$

wo einzelne der $\mathfrak{p}$ auch einander gleich sein können, so sind alle $\mathfrak{p}$ *vom 1. Grade.* Ist p_i die durch $\mathfrak{p}_i$ teilbare rationale Primzahl, so ist

$$p_i \equiv 1 \pmod{l}.$$

Denn alle $\mu, s\mu, \dots, s^{l-2}\mu$ sind teilerfremd[10]), und wäre $s^h \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, $0 < h < l-1$, so wäre $s^h \mu$ und μ durch $\mathfrak{p}$ teilbar.

Es sei λ_i die zu l und p_i gehörende *Lagrangesche Wurzelzahl*[11]), $\lambda_i^l = \omega_i$ eine Zahl von $k(\zeta)$. Dann ist, wegen[12]):

$$(\omega_i) = \mathfrak{p}_i^{r_0 + r_{-1}s + \dots + r_{-l+2}s^{l-2}}:$$

$$\frac{\Psi}{\omega_1^l \omega_2^l \dots \omega_n^l} = \zeta^g \varepsilon^l,$$

wo ε eine Einheit von $k(\zeta)$ ist. Jedes ε ist Produkt aus ζ^u und einer reellen Einheit[13]); man darf daher ε als reell auffassen. Nun ist:

$$n(\mu) = \mu^{1+s+\dots+s^{l-2}} = \frac{c^l}{a+b} \quad \text{oder} \quad = \frac{c^l}{l(a+b)},$$

also stets $= c_1^l$. Somit wird:

$$|\Psi| = \prod_{i=0}^{\frac{l-3}{2}} \left| \mu^{r_{-i}s^i} \cdot \mu^{r_{\frac{l-1}{2}-i} s^{\frac{l-1}{2}+i}} \right| = \prod_{i=0}^{\frac{l-3}{2}} \left| \mu^{\left(r_{-i} + r_{\frac{l-1}{2}-i}\right)s^i} \right|$$

$$= \prod_{i=0}^{\frac{l-3}{2}} \left| \mu^{s^i} \right|^l = |c_1|^{\frac{l^2}{2}}.$$

Andererseits ist, da $|\omega_i| = |\sqrt{p_i}|^l$:[14])

$$|\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n|^l = |\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}|^{l^2} = |c_1|^{\frac{l^2}{2}}.$$

---

[9]) Furtwängler, Letzter Fermatscher Satz usw. Sitz.-Ber. d. Akad. Wiss. Wien 121 (1912).

[10]) Siehe Abschnitt 1, S. 1.

[11]) Zahlbericht, S. 362.

[12]) Zahlbericht, S. 358.

[13]) Zahlbericht, S. 336 Satz 127.

[14]) Zahlbericht, S. 362.

Also ist

$$\left|\frac{\Psi}{\omega_1^l \ldots \omega_n^l}\right| = |\varepsilon|^l = 1,$$

oder, da ε eine reelle Einheit ist[15]):

$$\varepsilon = \pm 1.$$

Somit ist

$$\Psi = \pm \zeta^g (\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n)^l.$$

In dieser Gleichung nimmt man die $(s-r)$-te symbolische Potenz. Dann wird nach früherem und wegen $\omega_i^{s-r} = \beta_i^l$:[16])

$$\mu^{-l(q_0 + q_{-1}s + \cdots + q_{-l+2}s^{l-2})} = \zeta^0 (\beta_1 \ldots \beta_n)^{l^2},$$

oder

$$\text{(II)} \qquad \mu^{q_0 + q_{-1}s + \cdots + q_{-l+2}s^{l-2}} = \zeta^{g_1}\gamma\,,$$

wo γ eine Zahl von $k(\zeta)$ ist.

5.

Die Formel (II) enthält das *Kummersche Kriterium*. Es seien a, b, c *zu l prim*. Dann ist $(a+b)$ eine l-tePotenz, und man kann durch

$$(a+b)^{q_0 + q_{-1}s + \cdots + q_{-l+2}s^{l-2}}$$

beide Seiten dividieren:

$$(1 + \sigma(\zeta - 1))^{q_0 + q_{-1}s + \cdots + q_{-l+2}s^{l-2}} = \zeta^{g_1}\delta^l, \quad \sigma = \frac{b}{a+b},$$

woraus wieder:

$$\delta^l \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}^l}, \quad (1 + \sigma(\zeta - 1))^{q_0 + q_{-1}s + \cdots + q_{-l+2}s^{l-2}} \equiv \zeta^{g_1} \pmod{\mathfrak{l}^l}.$$

Entwickelt man links und rechts nach Potenzen von $\zeta - 1$, so müssen die Koeffizienten links und rechts der ersten $(l-1)$ Potenzen von $(\zeta - 1) \pmod{l}$ kongruent sein. Die Koeffizienten von $\zeta - 1$ ergeben

$$g_1 \equiv \sigma \frac{r^l - r}{l} \pmod{l}.$$

Also ist

$$(1 + \sigma(\zeta - 1))^{\sum\limits_{i=0}^{l-2} q_{-i}s^i} \equiv \zeta^{\sigma\left(\frac{r^l - r}{l}\right)} \pmod{\mathfrak{l}^l}.$$

Am einfachsten wird die Rechnung, wenn man in diesen Kongruenzen links und rechts die Logarithmen nimmt und entwickelt. Auch für diese

---

15) Zahlbericht, S. 221 Satz 48.

16) Zahlbericht, S. 354 Satz 133.

Entwicklungen nach $(\zeta - 1)$ müssen die $(l-1)$ ersten Koeffizienten $(\operatorname{mod} l)$ kongruent sein. Man findet:

$$\sum_{i=0}^{l-2} q_{-i} r_i^h \sum_{\nu=1}^{h} (-1)^{\nu-1} (\nu-1)!\, a_{\nu,h} \sigma^\nu \equiv 0 \,(\operatorname{mod} l), \qquad h = 2, 3, \ldots, \; l-2.$$

Für die ganzen rationalen Zahlen $a_{\nu,h}$ gelten die Rekursionsformeln:

$$y^h = \sum_{\nu=1}^{h} y(y-1)\ldots(y-\nu+1)\, a_{\nu,h}, \qquad h = 1, 2, \ldots, \; l-2.$$

Die obige Kongruenz ist für jedes $h = 2t$ erfüllt, da dann:

$$\sum_{i=0}^{l-2} q_{-i} r_i^{2t} \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} l)\,[17].$$

Ist $h = 2t+1$, so folgt, daß $B_{\frac{l-1}{2}-t}$ und $\sum_{i=0}^{l-2} q_{-i} r_i^{2t+1}$ nur gleichzeitig durch l teilbar sind[18]. Also muß:

$$B_{\frac{l-1}{2}-t} \cdot \sum_{\nu=1}^{2t+1} (-1)^\nu (\nu-1)!\, a_{\nu,2t+1} \sigma^\nu \equiv 0 \;\; (\operatorname{mod} l) \quad t \quad 1, 2, \ldots, \frac{l-3}{2}$$

sein, was das *Kummersche Kriterium* ist[19].

6.

Sind wieder a, b, c zu l prim, so ist:

$$\mu^{r_h^{2t-1} s^h \sum_{i=0}^{l-2} q_{-i} s^i} = \zeta^{r^{2th} \sigma \frac{r^l - r}{l}} \varkappa^l, \quad \sigma \equiv \frac{b}{a+b} (\operatorname{mod} l); \; \begin{cases} h = 0, 1, \ldots, & l-2 \\ t = 1, 2, \ldots, & \frac{l-1}{2} \end{cases}$$

multipliziert man alle diese $(l-1)$ Gleichungen miteinander, so wird:

$$\mu^{\sum_{h=0}^{l-2} \sum_{i=0}^{l-2} r_h^{2t-1} q_{-i} s^{i+h}} = \zeta^{\frac{r^{2t(l-1)}-1}{r^{2t}-1} \sigma \frac{r^l - r}{l}} \varrho^l = \varrho^l, \text{ für } t < \frac{l-1}{2}$$

$$= \zeta^{-\sigma \frac{r^l - r}{l}} \varrho^l, \text{ für } t = \frac{l-1}{2}.$$

Nun ist aber, wenn $h_1 = i + h$, wegen $r_{h-i} \equiv r_h r_{-i}$:

---

[17]) Zahlbericht, S. 431. Dies ergibt sich sofort durch die dort angegebene Berechnungsart.

[18]) Zahlbericht, S. 431.

[19]) Kummer, Einige Sätze über die aus den Wurzeln der Gleichung $\alpha^\lambda = 1$ gebildeten komplexen Zahlen usw. Abhdl. d. Berlin. Akad. d. Wiss. 1857, S. 63 u. ff

$$\sum_{h=0}^{l-2}\sum_{i=0}^{l-2} r_h^{2t-1} q_{-i}\, s^{i+h} \equiv \sum_{i=0}^{l-2}\sum_{h_1=0}^{l-2} r_{-i}^{2t-1} q_{-i}\, r_{h_1}^{2t-1} s^{h_1} \pmod{l},$$

$$\equiv \sum_{i=0}^{l-2} r_{-i}^{2t-1} q_{-i} \sum_{h=0}^{l-2} r_h^{2t-1} s^h \pmod{l},$$

$$\equiv C B_t \sum_{h=0}^{l-2} r^{2t-1} s^h \pmod{l},$$

wo C zu l prim und B_t die t-te Bernoullische Zahl ist[20]). Somit ist:

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \mu^{B_t \sum\limits_{h=0}^{l-2} r_h^{2t-1} s^h} = \varrho^l & \left(t = 1, 2, \ldots, \dfrac{l-3}{2}\right) \\ \mu^{\sum\limits_{h=0}^{l-2} r_{-h} s^h} = \zeta^{-\sigma} \alpha^l & \left(t = \dfrac{l-1}{2}\right). \end{cases}$$

(was die frühere Formel (I) ist). Aus (III) folgen genau wie früher die Mirimanoffschen[21]) Bedingungsgleichungen:

$$B_t \sum_{h=0}^{l-2} r^{-2th} \sigma^{r_h} \equiv B_t \sum_{n=1}^{l-1} n^{-2t} \sigma^n \equiv 0 \pmod{l}, \quad t = 1, 2, \ldots, \frac{l-3}{2}.$$

7.

Die *Kummersche Gleichung*[22]) ergibt sich ebenfalls aus II:

$$\mu^{\sum\limits_{i=0}^{l-2} q_{-i} s^{i+k}} = \zeta^{r_k g_1} \gamma^l,$$

oder

$$\mu^{\sum\limits_{i=0}^{l-2} q_{i+k} s^{-i}} = \zeta^{r_k g_1} \gamma^l,$$

falls man für q_{i+k}:

$$q_{i+k} = \left[\frac{r r_i r_k}{l}\right] - r\left[\frac{r_i r_k}{l}\right]$$

setzt, wo $[x]$ die Gaußsche Funktion ist. Schreibt man für $r_k : a$, wo $a = 1, 2, \ldots,\ l-1$ wird (nicht zu verwechseln mit dem a von 1.), so ist:

$$\mu^{\sum\limits_{i=0}^{l-2}\left[\frac{a r r_i}{l}\right] s^{-i} - \sum\limits_{i=0}^{l-2} r\left[\frac{a r_i}{l}\right] s^{-i}} = \zeta^{a g_1} \gamma^l,$$

---

[20]) Zahlbericht, S. 431.

[21]) Mirimanoff, L'équation indéterminée $x^l + y^l + z^l = 0$ et le critérium de Kummer. Journal f. Math. 128 (1905), S. 64.

[22]) Kummer, a. a. O., S. 62.

woraus sukzessive wegen $\sum_{i=0}^{l-2}\left[\frac{r_i}{l}\right]s^{-i}=0$:

$$\text{(IV)}\qquad \mu^{\sum\limits_{i=0}^{-2}\left[\frac{a r_i}{l}\right]s^{-i}}=\zeta^{g_a}\bar{\gamma}^{l}\qquad (a=1,2,\ldots,\ l-1).$$

Hierzu tritt noch Formel (I):

$$\mu^{\sum\limits_{i=0}^{l-2} r_i s^{-i}}=\zeta^{g}\alpha^{l}.$$

Setzt man $d(a, r_i)=\left[\frac{a r_i}{l}\right]-\left[\frac{(a-1)\,r_i}{l}\right]$, so wird $d(a, r_i)=0$ oder 1, und es ist nach Division zweier Formeln (IV):

$$\text{(V)}\qquad \mu^{\sum\limits_{i=0}^{l-2} d(a,r_i)\,s^{-i}}=\zeta^{k}\gamma^{l}$$

die *Kummersche Formel*[22]).

8.

Sind a, b, c wieder zu l teilerfremd, so ist $(a+b)$ eine l-te Potenzzahl und (IV) kann wieder so geschrieben werden:

$$(1+\sigma(\zeta-1))^{\sum\limits_{i=0}^{l-2}\left[\frac{r_i a}{l}\right]s^{i}}=\zeta^{g_a}\bar{\gamma}^{l}.$$

Daraus folgt $\bar{\gamma}\equiv 1 \pmod{l}$, $\bar{\gamma}^{l}\equiv 1 \pmod{l}$; also:

$$(1+\sigma(\zeta-1))^{\sum\limits_{i=0}^{l-2}\left[\frac{r_i a}{l}\right]s^{-i}}\equiv\zeta^{g_a}\pmod{l}$$

$$(1+\sigma(\zeta-1))^{l\sum\limits_{i=0}^{l-2}\left[\frac{r_i a}{l}\right]s^{-i}}\equiv 1\pmod{l^2}.$$

Nun ist:

$$a^l+b^l+c^l=0,\quad a+b+c\equiv 0\pmod{l},\quad \frac{-c}{a+b}\equiv 1\pmod{l},$$

$$\frac{-c^l}{(a+b)^l}=\frac{a^l+b^l}{(a+b)^l}\equiv 1\pmod{l^2},$$

oder

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^l+\left(\frac{b}{a+b}\right)^l=(1-\sigma)^l+\sigma^l\equiv 1\pmod{l^2}.$$

Somit ist

$$(1+\sigma(\zeta-1))^l=(1-\sigma+\sigma\zeta)^l\equiv 1+l\sum_{k=0}^{-2} r_{-k}\,\sigma^{r_k}(\sigma-1)^{l-r_k}\zeta^{r^k}\pmod{l^2},$$

und die obige Kongruenz geht in die folgende über:

$$\left(1+l\sum_{k=0}^{l-2} r_{-k}(\sigma-1)^{l-r_k}\sigma^{r_k}\zeta^{r^k}\right)^{\sum\limits_{i=0}^{l-2}\left[\frac{r_i a}{l}\right] s^{-i}} \equiv 1 \pmod{l^2},$$

d. h. nach Entwicklung:

$$\sum_{i=0}^{l-2}\sum_{k=0}^{l-2} r_{-k}(\sigma-1)^{l-r_k}\,\sigma^{r_k}\zeta^{r^{k-i}}\left[\frac{a r_i}{l}\right] \equiv 0 \pmod{l}.$$

Statt über k, summiere man über $k-i$:

$$(\sigma-1)^l\sum_{i=0}^{l-2}\sum_{k=0}^{l-2} r_{-k-i}\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)^{r_{k+i}}\left[\frac{a r_i}{l}\right]\zeta^{r^k} \equiv 0 \pmod{l}.$$

Da $\zeta, \zeta^r, \ldots, \zeta^{r^{l-2}}$ eine Basis der ganzen Zahlen ist, muß jeder Koeffizient von $\zeta^{r^k} \equiv 0 \pmod{l}$ sein:

$$\sum_{i=0}^{l-2} r_{-i}\left[\frac{a r_i}{l}\right]\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)^{r_i} \equiv 0 \pmod{l} \qquad (a=1, 2, \ldots, l-1),$$

(da $r_i r_k \equiv r_{i+k}$). Statt $\frac{\sigma}{\sigma-1} = -\frac{b}{a} \equiv \frac{b}{b+c}$ kann man wieder σ schreiben; also erhält man die neue Form der Kummerschen Bedingung ($r_i = n$):

$$\text{(VI)} \qquad \sum_{n=1}^{l-1}\left[\frac{a n}{l}\right]\cdot\frac{\sigma^n}{n} \equiv 0 \pmod{l} \qquad (a=1, 2, \ldots, l-1).$$

Dazu tritt noch:

$$\sum_{n=1}^{l-1}\frac{\sigma^n}{n} \equiv 0 \pmod{l},$$

was immer erfüllt sein muß[23]).

Kürzt man mit $q(n)$ den Fermatschen Quotienten[24])

$$q(n) = \frac{n^{l-1}-1}{l}$$

ab, so folgt aus $r_i r_k = r_{i+k} + l\left[\frac{r_i r_k}{l}\right]$:

$$(r_i r_k)^{l-1} - 1 \equiv r_{i+k}^{l-1} - 1 - l\left[\frac{r_i r_k}{l}\right] r_{i+k}^{l-2} \pmod{l^2}$$

oder

$$\frac{1}{r_i r_k}\left[\frac{r_i r_k}{l}\right] \equiv q(r_{\cdot+k}) - q(r_i r_k) \pmod{l}.$$

---

[23]) Dies ist nichts anderes als die schon erhaltene Kongruenz:

$$(1-\sigma)^l + \sigma^l \equiv 1 \pmod{l^2}.$$

[24]) Siehe zum folgenden Lerch, Zur Theorie des Fermatschen Quotienten. Math. Ann. 60 (1905), S. 471.

Somit läßt sich (VI) auch so schreiben:

$$\sum_{i=0}^{l-2} q(r_{i+k})\sigma^{r_i} - \sum_{i=0}^{l-2} q(r_i r_k)\sigma^{r_i} \equiv 0 \pmod{l}.$$

Nun ist aber

$$q(r_i r_k) \equiv q(r_i) + q(r_k) \pmod{l},$$

$$\sum_{i=0}^{l-2} \sigma^{r_i} \equiv 0 \pmod{l}.$$

Also:

$$\sum_{i=0}^{l-2} q(r_{i+k})\sigma^{r_i} \equiv \sum_{i=0}^{l-2} q(r_i)\sigma^{r_i} \pmod{l} \quad (k = 0, 1, \ldots, l-2).$$

Wegen:

$$q(r_i) = \sum_{a=1}^{l-1} \frac{1}{a r_i}\left[\frac{a r_i}{l}\right]$$

erhält man durch Summation der Kongruenzen (VI) von $a = 1$ bis $a = l-1$

$$\sum_{i=0}^{l-2} q(r_i)\sigma^{r_i} \equiv 0 \pmod{l}.$$

Also ist

$$\text{(VII).} \qquad \sum_{i=0}^{l-2} q(r_{i+k})\sigma^{r_i} \equiv 0 \pmod{l} \qquad (k = 0, 1, \ldots, l-1)$$

eine weitere Form des Kriteriums.

Zürich, den 27. Juli 1921.

(Eingegangen am 31. 7. 1921.)

Zahlengeometrische Untersuchung über die extremen Formen für die indefiniten quadratischen Formen.

Von

M. Fujiwara in Sendai (Japan).

Die Theorie der extremen Formen für die positiven quadratischen Formen wurde zuerst von Korkine und Zolotareff[1]) untersucht und dann von Minkowski[2]) zum Abschluß gebracht, während diejenige der indefiniten quadratischen Formen bloß in dem Falle der binären und ternären Formen von Markoff[3]) behandelt wurde. Der Minkowskische Standpunkt ist zahlengeometrisch: er hat gezeigt, daß das Problem der extremen Formen für die positiven quadratischen Formen mit demjenigen der dichtesten gitterförmigen Lagerung von Kreisen und Kugeln äquivalent ist. Dies ist eines der schönsten Kapitel in der von ihm geschaffenen Geometrie der Zahlen. Ich möchte hier darauf aufmerksam machen, daß der Minkowskische Gedankengang viel weitergehend, nämlich auch auf indefinite quadratische Formen mit Erfolg anwendbar ist, wenn auch er selbst nicht darauf eingegangen ist. Hier treten Hyperbel und Hyperboloid an die Stelle von Kreis und Kugel, und verliert dabei natürlich das Wort „dichteste gitterförmige Lagerung" seinen Sinn. Von diesem Standpunkt kann man fast alle Resultate von Markoff sehr anschaulich ableiten. Ich möchte in den folgenden Zeilen nur den Fall der binären Formen kurz behandeln, und den Fall der ternären Formen für eine spätere Arbeit vorbehalten.

---

[1]) Korkine und Zolotareff, Sur les formes quadratiques positives, Math. Ann. 5 (1872), 6 (1873), 11 (1877).

[2]) Minkowski, Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper, Göttinger Nachr. 1904; Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz, Journ. f. Math. 129 (1905).

[3]) Markoff, Sur les formes quadratiques indéfinies, Math. Ann. 15 (1879), 17 (1880), 56 (1903).

Es sei

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

eine indefinite quadratische Form mit beliebigen reellen Koeffizienten, deren Diskriminante $D = b^2 - 4ac > 0$ ist, und ferner sei $M(f)$ das Minimum des absoluten Betrags der durch f darstellbaren Zahlen. Man nennt diese Form extrem, wenn bei allen denjenigen infinitesimalen Variationen der Koeffizienten, wobei D unverändert bleibt, $M(f)$ niemals zunimmt. Man kann aber diese Definition folgendermaßen umformen: Die Form ist extrem, wenn bei allen denjenigen infinitesimalen Variationen der Koeffizienten, wobei $M(f)$ ungeändert bleibt, die Diskriminante D niemals abnimmt. Die letztere Definition paßt sich am besten der folgenden geometrischen Auffassung an.

Es sei

$$f = \xi\eta, \qquad \xi = \alpha_1 x + \alpha_2 y, \qquad \eta = \beta_1 x + \beta_2 y,$$

und seien (ξ, η) die rechtwinkligen Punktkoordinaten in der Ebene. Man denke ein Parallelgitter, dessen fundamentales Parallelogramm die Seiten OA, OB besitzt, wo $O = (0, 0)$, $A = (\alpha_1, \beta_1)$, $B = (\alpha_2, \beta_2)$ sind. Dann entspricht einem ganzzahligen Paar (x, y) ein Gitterpunkt, den wir mit $[x, y]$ bezeichnen. Z. B. $A = [1, 0]$, $B = [0, 1]$.

Man kann durch Multiplikation mit einer geeigneten Zahl $M(f) = 1$ setzen; dann ist für jedes ganzzahlige Paar (x, y), $|\xi\eta| \geqq 1$, und für mindestens ein Paar (x, y), $|\xi\eta| = 1$. Dies bedeutet geometrisch, daß, wenn man zwei konjugierte Hyperbeln $H_1 : \xi\eta = 1$ und $H_2 : \xi\eta = -1$ zeichnet, und das zwischen H_1 und H_2 liegende, den Anfangspunkt enthaltende Gebiet mit Ω bezeichnet, dann kein Gitterpunkt innerhalb Ω liegt, während mindestens ein Gitterpunkt auf H_1 oder H_2 liegt. Hier ist der Inhalt Δ des fundamentalen Parallelogramms gleich $|\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1| = \sqrt{D}$. Das kann man etwa so aussprechen: Die Form ist extrem, wenn bei allen denjenigen infinitesimalen Deformationen des zu dieser Form zugehörigen Gittersystems, bei denen kein Gitterpunkt außer O innerhalb Ω liegt, der Inhalt des Gitterparallelogramms niemals abnimmt. Dieses Gitter mögen wir das extreme Gitter nennen.

Es sei ein Parallelgitter G vorgelegt, für welches kein Gitterpunkt innerhalb Ω liegt, und mindestens ein Gitterpunkt A auf H_1 oder H_2 liegt. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß A auf H_1 in dem ersten Quadranten liegt. Durch Anpassung kann man das Gitter so transformieren, daß A der Punkt $[1, 0]$ in dem transformierten Gittersystem wird. Weiter kann man das Gittersystem ohne Änderung des zugehörigen Punktgitters so umformen, daß der Punkt $\beta = [0, 1]$ in dem zweiten Quadranten liegt.

Wenn außer $A = [1, 0]$ und $A' = [-1, 0]$ kein Gitterpunkt auf H_1 und H_2 liegt, so kann man durch Verschiebung von B gegen O den Inhalt Δ ver-

kleinern, bis ein neues Paar von Gitterpunkten, M, M', auf H_1 oder H_2 eintritt. Ferner, wenn außer A, A', M, M' kein Gitterpunkt auf H_1, H_2 liegt, dann kann man durch Verschiebung von B gegen OA, derart, daß M und M' auf H_1 oder H_2 liegen bleiben, den Inhalt Δ verkleinern, bis ein drittes Paar von Gitterpunkten auf H_1 oder H_2 eintritt. Dies ist nur in dem Falle unzulässig, wenn B schon mit dem Punkt B_0 zusammenfällt, wo B_0 den Berührungspunkt der zu OA parallelen Tangente von H_2 bedeutet. Daß dieser Fall nicht eintreten kann, ersieht man gleich, weil der Punkt $[1, 1]$ dabei sicherlich innerhalb Ω liegt. *Also für das extreme Gitter ist es notwendig, daß mindestens drei Paare von Gitterpunkten auf der Begrenzung H_1, H_2 von Ω liegen.*

Nun bezeichnen wir mit H_1', H_1'' denjenigen Teil von H_1 in dem ersten bzw. dritten Quadranten, welcher in bezug auf A, A' mit dem Punkt $(\xi = 0, \eta = +\infty)$ auf derselben Seite liegt. Es sei ferner H_2' der Teil von H_2 in dem zweiten Quadranten, welcher zwischen B_0 und dem Punkt $(\xi = 0, \eta = +\infty)$ liegt, und sei H_2'' der übrige Teil von H_2 in dem zweiten Quadranten.

Durch Überlegungen wie oben kann man schließen, daß *für das extreme Gitter notwendig ist, daß außer A und A' entweder ein Gitterpunkt E auf H_2' und ein zweiter Gitterpunkt F auf H_2'' liegt, oder E auf H_2' und F auf H_1' oder E auf H_2'' und F auf H_1'' liegt. Wenn außerdem kein Gitterpunkt mit Ausnahme von O innerhalb Ω liegt, so ist sicherlich das vorgelegte Gitter extrem*, denn man kann nicht mehr durch infinitesimale Deformation des Gitters den Inhalt Δ verkleinern. Dieses Gitter ist durch E und F eindeutig bestimmt. Wenn man $E = [p, q]$, $F = [p', q']$ setzt, dann mögen wir dieses Gitter mit $G([p, q], [p', q'])$ bezeichnen. Die dazu gehörige Form hat die Gestalt $f = x^2 - hxy - ky^2$, wo h, k rationale Funktionen von p, q, p', q' sind.

Man kann daraus beiläufig schließen, daß *für die extremen Formen die Verhältnisse der Koeffizienten immer rational sein müssen.*

Nun sei l die durch den Gitterpunkt $B = [0,1]$ hindurchgehende und zu OA parallele Gerade, und U, V seien die Schnittpunkte von l mit H_2'', H_2'.

Ist $UV < OA$, und liegt B auf UV, so liegt der Gitterpunkt $[1, 1]$ oder $[-1, 1]$ sicherlich in Ω. Ist $UV = OA$, und $B \neq U, \neq V$, so liegt auch $[1, 1]$ oder $[-1, 1]$ sicherlich in Ω. Wenn dagegen $\overline{U}\,\overline{V} = OA$ und $B = U$, so ergibt sich das Gitter $G([0, 1], [1, 1]) = G_0$, für welches

$$f_0 = x^2 - xy - y^2, \qquad \Delta_0 = \sqrt{5}.$$

Da $|f_0| \geq 1$ für jedes ganzzahlige Paar $(x, y) \neq (0, 0)$, liegt kein Gitterpunkt außer O in Ω. Also ist f_0 die extreme Form, für welche Δ_0 unter allen extremen Formen ein Minimum ist.

Wenn $OA < UV < 2 \cdot OA$, und B auf UV liegt, so liegt sicherlich

$[2,1]$ oder $[-2,1]$ in Ω. Wenn dagegen $UV = 2 \cdot OA$ und $B = U$, so bekommt man das Gitter $G([0,1], [2,1]) = G_1$, für welches

$$f_1 = x^2 - 2xy - y^2, \qquad \Delta_1 = \sqrt{8}.$$

Da für jedes ganzzahlige Paar $(x, y) \neq (0, 0)$, $|f_1| \geqq 1$ ist, ist diese Form die zweite extreme Form.

Es ist sehr leicht ersichtlich, daß die zu $G([0,1], [m,1])$ gehörigen Formen

$$f = x^2 - mxy - x^2, \qquad \Delta^2 = m^2 + 4$$

auch extrem sind. Aber es gibt unendlich viele extreme Formen, deren Δ zwischen $\sqrt{8}$ und $\sqrt{13}$ liegen, was ich im folgenden zeigen möchte.

In dem Gittersystem G_1 liegen unendlich viele Gitterpunkte auf H_1 und H_2, die man durch die Auflösung der sogenannten Pellschen Gleichung sehr leicht bestimmen kann. Wir mögen mit P_n, P'_n $(n = 1, 2, \ldots)$ die auf H'_1 H''_1 liegenden, aufeinander folgenden Gitterpunkte, und mit Q_n, Q'_n die auf H''_2 und H'_2 liegenden, aufeinanderfolgenden Gitterpunkte bezeichnen. Z. B. $P_1 = [5,2]$, $P'_1 = [-1,2]$, $Q_1 = B = [0,1]$, $Q_2 = [-2,5]$, $Q_3 = [-12,29]$, $Q'_1 = [2,1]$, $Q'_2 = [12,5]$, usw.

Wenn der Gitterpunkt $B = [0,1]$ sich um eine Strecke d verschiebt, so verschieben sich P_1 und P'_1 parallel mit B um die Strecke $2d$. Also durch Verschiebung von B gelangen wir zu dem nächsten extremen Gitter, wenn und nur wenn P_1 auf H_2 oder P'_1 auf H''_2 in Ω eintritt. In diesem Fall ist der Abstand des Punktes $[0,1]$ von OA nach der Verschiebung möglichst klein, wenn B wieder auf H''_2, P_1 auf H'_2 eintritt, oder $[2,1]$ auf H'_2 und P'_1 auf H''_2 eintritt. Damit bekommen wir zwei Gittersysteme

$$G_2 = G([5,2], [0,1]), \qquad \Delta_2^2 = \frac{221}{25} = 9 - \frac{4}{5^2},$$

$$G'_2 = G([-1,2], [2,1]), \qquad \Delta'_2 = \Delta_2,$$

und die zugehörigen

$$f_2 = x^2 - \frac{11}{5} xy - y^2,$$

$$f'_2 = x^2 - \frac{9}{5} xy - \frac{7}{5} y^2.$$

Diese zwei Formen sind einander äquivalent. Daß für jedes ganzzahlige Paar $(x, y) \neq (0, 0)$, $|f_2| \geqq 1$ ist, ist leicht beweisbar. Also ist f_2 die dritte extreme Form.

Setzt man $P_n = [p_n, q_n]$, $Q_n = [-r_n, s_n]$, so sind $G([5,2], [-r_n, s_n])$, $G([0,1], [p_n q_n])$ auch extreme Formen, für welche

$$\Delta^2 = 9 - \frac{4}{s_{n+1}^2}, \quad \text{bzw.} \quad \Delta^2 = 9 - \frac{4}{q_{n+1}^2}$$

sind.

Die Formen, welche den ersten 7 Gittern in $G([0,1], [p_n, q_n])$ entsprechen, sind schon die extremen Formen $f_0, f_1, f_2, f_3, f_5, f_6, f_9$ in der von Markoff angegebenen Tabelle der extremen Formen.

Den Grenzgittern von $G([5,2], [-r_n, s_n])$ und $G([0,1], [p_n, q_n])$ für $n \to \infty$ entsprechen die Formen

$$f = x^2 - (2\sqrt{2} - 1)xy - \sqrt{2}y^2, \qquad \Delta = 3;$$

bzw.

$$f = x^2 - \sqrt{5}xy - y^2, \qquad \Delta = 3.$$

Diese sind natürlich keine extremen Formen.

Die Einschaltung der richtigen extremen Formen f_4, f_7, f_8, zwischen f_3 und f_5 und zwischen f_6 und f_9 und der Nachweis, daß $f_0, f_1, f_2, \ldots$ wirklich nach der Größenordnung von Δ geordnet sind, bedürfen längerer Auseinandersetzungen und sind etwas kompliziert. Ich verzichte jetzt auf die eingehenden Betrachtungen und möchte später im Tôhoku Mathematical Journal ausführlich davon sprechen.

Göttingen, August 1921.

(Eingegangen am 10. 8. 1921.)

Ein algebraisches Kriterium für absolute Irreduzibilität.

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Ein Polynom — mit Koeffizienten aus einem beliebigen, abstrakt definierten Körper — heißt *absolut irreduzibel*, wenn es irreduzibel bleibt in dem algebraisch-abgeschlossenen Körper, zu dem der Koeffizientenbereich sich erweitern läßt[1]). Ich zeige im folgenden, daß die absolute Irreduzibilität, im Gegensatz zu der Irreduzibilität in bezug auf einen vorgegebenen Körper, sich *algebraisch* fassen läßt; genauer gilt der Satz:

Jedem Polynom von $n \geqq 2$ Veränderlichen mit unbestimmten Koeffizienten läßt sich eine ganze rationale, ganzzahlige Funktion dieser Koeffizienten und weiterer Unbestimmten zuordnen, die Reduzibilitätsform; derart, daß für jedes spezielle Polynom gleichen Grades die notwendige und hinreichende Bedingung für absolute Irreduzibilität im Nichtverschwinden der Reduzibilitätsform gegeben ist. Mit anderen Worten: *Für jedes spezielle Wertsystem der Koeffizienten, für das die Reduzibilitätsform identisch in den Unbestimmten verschwindet und das keine Graderniedrigung bedingt, wird das spezielle Polynom reduzibel, und umgekehrt.*

Betrachtet man statt der Polynome homogene Formen in einer Veränderlichen mehr, so tritt an Stelle der Gradbedingung die einfachere, daß das Koeffizientensystem nicht identisch verschwindet.

Als direkte Folgerung des Satzes ergibt sich noch der zuerst von A. Ostrowski aufgestellte[2]):

---

[1]) Daß sich jeder Körper, und zwar im wesentlichen eindeutig, zu einem algebraisch-abgeschlossenen erweitern läßt, d. h. zu einem solchen, in dem jedes Polynom *einer* Veränderlichen in Linearfaktoren zerfällt, hat E. Steinitz in seiner „Algebraischen Theorie der Körper" (J. f. M. **137** (1910), S. 167) gezeigt; und hat damit das rationale Äquivalent für den Fundamentalsatz der Algebra gegeben.

[2]) Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Gött. Nachr. 1919, S. 279 (Hilfssatz S. 296). — Für den Fall der aus gewöhnlichen Zahlen bestehenden Körper ist Ostrowski, wie mir bekannt ist, auch auf den obigen Hauptsatz ge-

Jedes absolut irreduzible Polynom mit algebraischen Zahlen als Koeffizienten bleibt irreduzibel modulo jedes Primideals eines endlichen algebraischen Körpers $\mathfrak{K}$, der den Koeffizientenbereich enthält, mit Ausnahme höchstens einer endlichen Anzahl von Primidealen aus $\mathfrak{K}$. Insbesondere kann $\mathfrak{K}$ auch der Körper der rationalen Zahlen sein.

Auf weitere Anwendungen zur Theorie der relativ ganzen Funktionen[3]) gedenke ich an anderer Stelle einzugehen.

1. Es sei vorerst gezeigt, daß *jedes Polynom von $n \geq 2$ Veränderlichen mit unbestimmten Koeffizienten absolut irreduzibel* ist. Sei nämlich gesetzt:

$$\begin{aligned} &F(x) = \Sigma A_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} && (i_1 + \ldots + i_n \leq l), \\ (1)\quad &G(x) = \Sigma B_{j_1 \ldots j_n} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n} && (j_1 + \ldots + j_n \leq m), \\ &H(x) = F(x)\,G(x) = \Sigma C_{k_1 \ldots k_n}(A, B)\, x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} && (k_1 + \ldots + k_n \leq l + m), \end{aligned}$$

wo die A und B Unbestimmte bedeuten, und die $C(A, B)$ ganzzahlige, bilineare Verbindungen der A und B werden. Es werden daher die Quotienten $D = C(A, B)/C_{0 \ldots 0}(A, B)$ rationale Funktionen der Quotienten $A/A_{0 \ldots 0}$ und $B/B_{0 \ldots 0}$; die Anzahl dieser Funktionen wird aber größer als die ihrer Argumente; denn sie beträgt bzw. $\binom{l+m+n}{n} - 1$, $\binom{l+n}{n} - 1$, $\binom{m+n}{n} - 1$, und es gilt

$$\binom{l+m+n}{n} + 1 > \binom{l+n}{n} + \binom{m+n}{n} \quad \text{für } n \geq 2,\ l > 0,\ m > 0.$$

Somit besteht mindestens *eine* algebraische Relation zwischen den $D(A, B)$ und folglich auch zwischen den $C(A, B)$:

$$(2)\quad \Phi(Z) \neq 0 \ [\text{identisch in } Z_{k_1 \ldots k_n}], \quad \Phi(C(A, B)) = 0 \ [\text{identisch in } A, B],$$

wo Φ ein ganzzahliges Polynom bedeutet.

Ein Polynom mit *Unbestimmten* Z als Koeffizienten:

$$(3)\qquad E(x) = \sum Z_{k_1 \ldots k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \quad (k_1 + \ldots + k_n \leq l + m)$$

ist also für $n \geq 2$ notwendig *absolut irreduzibel*[4]).

2. Die Gesamtheit dieser Polynome $\Phi(Z)$, die bei der Substitution $Z = C(A, B)$ identisch in A, B verschwinden, bildet ein *Ideal aus Polynomen*[5]), genauer ein *Primideal* $\mathfrak{P}$; denn verschwindet vermöge der Substitu-

kommen; er wird seine diesbezüglichen Untersuchungen demnächst veröffentlichen. Daß bei meiner Beweisanordnung der Hauptsatz für beliebige, abstrakt definierte Körper gilt, beruht darauf, daß die für Unbestimmte gebildete Reduzibilitätsform von dem *speziell zugrunde gelegten Körper unabhängige Zahlkoeffizienten* besitzt.

[3]) D. Hilbert, Mathematische Probleme. Gött. Nachr. 1900, S. 253, Problem 14.

[4]) Denn die Unbestimmten Z sind nach der Ausdrucksweise von 2. nicht Nullstellen von $\mathfrak{P}$.

[5]) Diese Gesamtheiten werden gewöhnlich als Moduln bezeichnet; tatsächlich ist aber die sie charakterisierende Eigenschaft — sie enthalten neben Φ_1 und Φ_2 auch

tion ein Produkt $\Phi_1 \Phi_2$, so verschwindet mindestens ein Faktor. Da (2) identisch in A, B erfüllt ist, bleibt es bestehen für jedes spezielle Wertsystem A, B; wo A, B und folglich auch $\Gamma = C(\mathsf{A}, \mathsf{B})$ Größen irgendeines Körpers bedeuten. *Die Koeffizienten* Γ *jedes in einem Erweiterungskörper reduziblen Polynoms genügen also den Bedingungen* $\Phi(\Gamma) = 0$, sind Nullstellen von $\mathfrak{P}$, oder auch der endlich vielen Basispolynome von $\mathfrak{P}$; es handelt sich jetzt um den *Nachweis der Umkehrung.*

Dazu ist zu bemerken, daß alle Beziehungen zwischen A, B, C erhalten bleiben, wenn man die Polynome (1) durch Einführung einer neuen Veränderlichen y in *homogene Formen* $F(x, y)$, $G(x, y)$, $H(x, y)$ der Dimensionen l, m, $l + m$ verwandelt. Es werden also auch solche Koeffizienten Γ Nullstellen von $\mathfrak{P}$, bei denen etwa $\bar{F}(x, y)$[6]) eine Potenz von y wird, denen also durch den Übergang zu inhomogenen Polynomen eine Graderniedrigung von $\bar{H}(x)$ und kein Zerfallen entspricht. Es wird sich zeigen, daß mit Ausnahme dieser Graderniedrigung die Umkehrung immer gilt; daß also insbesondere für *homogene Formen die Umkehrung ausnahmslos gilt,* sobald nicht alle Γ verschwinden; mit anderen Worten, daß *jede Nullstelle von* $\mathfrak{P}$ *durch die Parameterdarstellung* $\Gamma = C(\mathsf{A}, \mathsf{B})$ *mit Größen* A, B *eines Erweiterungskörpers geliefert wird*[7]).

Diesen Nachweis führe ich durch direkte Bildung von endlich vielen Funktionen $\Phi(Z)$; ich ordne nämlich vermöge der Kroneckerschen Substitution

$$x_\lambda = \xi^{d^{n-\lambda}} \quad {}^{8})$$

den Polynomen (1) solche von *einer* Veränderlichen zu; zeige, daß hier Lücken in den Exponenten auftreten, und komme durch Bildung der Norm der entsprechenden Koeffizienten zu den Funktionen $\Phi(Z)$ und zu dem gesuchten Kriterium.

3. Es sei gesetzt:

$$(4) \qquad \begin{aligned} d &= l + m + 1; & i &= i_1 d^{n-1} + i_2 d^{n-2} + \dots + i_n; \\ j &= j_1 d^{n-1} + \dots + j_n; & k &= k_1 d^{n-1} + \dots + k_n. \end{aligned}$$

$\Phi_1 - \Phi_2$, neben Φ auch $\Psi \cdot \Phi$, wo Ψ ein beliebiges ganzzahliges Polynom in Z bedeutet — die Idealeigenschaft.

[6]) Polynome und Formen, die dadurch entstehen, daß die Unbestimmten in $F, G, \dots, f, g, \dots$ durch spezielle Wertsysteme ersetzt werden, bezeichne ich durchweg durch *Überstreichen*: $\bar{F}, \bar{G}, \dots, \bar{f}, \bar{g}, \dots$

[7]) Daß „im allgemeinen“ die Nullstellen von $\mathfrak{P}$ durch die Parameterdarstellung geliefert werden, folgt aus der Eigenschaft des Primideals $\mathfrak{P}$, ein irreduzibles algebraisches Gebilde zu definieren. Daraus folgt aber bekanntlich nicht — was ich ursprünglich übersehen hatte und worauf mich A. Ostrowski vor längerer Zeit aufmerksam machte —, daß die Parameterdarstellung für kein spezielles Wertsystem versagt. — Der hier gegebene Beweis stützt sich auf elementarere Begriffe.

[8]) Festschrift, S. 11.

Dann entsprechen vermöge der Kroneckerschen Substitution den Polynomen F, G, H in (1) bzw. die Polynome

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
f(\xi) &= \Sigma A_{i_1\ldots i_n}\xi^i && (i_1+\ldots+i_n \leqq l),\\
g(\xi) &= \Sigma B_{j_1\ldots j_n}\xi^j && (j_1+\ldots+j_n \leqq m),\\
h(\xi) &= \Sigma C_{k_1\ldots k_n}(A,B)\,\xi^k && (k_1+\ldots+k_n \leqq l+m).
\end{aligned}
$$

Dies Entsprechen ist bekanntlich *ein-eindeutig*, da für alle in (5) auftretenden (*induzierten*) Exponenten aus $k=0$ auch $k_1=0,\ldots,k_n=0$ folgt; und somit aus $i+j=i'+j'$ auch: $i_1+j_1=i_1'+j_1';\ldots;i_n+j_n=i_n'+j_n'$. Es können also nur dann verschiedene Produkte $\xi^i\xi^j$ den gleichen Exponenten ξ^k liefern, wenn auch die entsprechenden $x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}x_1^{j_1}\ldots x_n^{j_n}$ zum gleichen Exponenten führen. Somit kommt:

$$
(6)\qquad h(\xi)=f(\xi)g(\xi),
$$

und aus dem Erfülltsein einer Relation (6), derart daß in $f(\xi)$ und $g(\xi)$ keine von den induzierten Exponenten verschiedene auftreten, folgt rückwärts

$$
(7)\qquad H(x)=F(x)\,G(x).
$$

Dabei *treten bei den induzierten Exponenten in $f(\xi)$ und $g(\xi)$ tatsächlich Lücken auf.* Denn es wird der höchste Exponent von $f(\xi)$ gleich $l\cdot d^{n-1}$, der zweithöchste gleich $(l-1)\,d^{n-1}+d^{n-2}$; die Differenz $d^{n-2}\cdot(d-1)>1$ wegen $d=l+m+1\geqq 3$; $n\geqq 2$; und dasselbe gilt für $g(\xi)$.

Die für die Unbestimmten A, B geltenden Relationen (6) und (7) bleiben erhalten für jedes spezielle Wertsystem A, B. Damit dabei die Gradzahlen erhalten bleiben, homogenisiere ich (6) und (7) vermöge der Veränderlichen η und y. *Eine homogene Form $H(x,y)$ zerfällt also dann und nur dann in einem algebraischen Erweiterungskörper, wenn in diesem die entsprechende binäre Form $\bar h(\xi,\eta)$ sich so in zwei Faktoren spalten läßt, daß keine von den induzierten Exponenten verschiedene in den Faktoren auftreten.*

4. Um die am Schluß von 2. erwähnte Bildung der Norm durchzuführen, mögen

$$
a_1, b_1;\ldots;\ a_p, b_p;\quad a_{p+1}, b_{p+1};\ldots;\ a_{p+q}, b_{p+q}
$$

neue Unbestimmte bedeuten. Es sei gesetzt

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
\varphi(\xi,\eta)&=(a_1\xi+b_1\eta)\ldots(a_p\xi+b_p\eta)=r_p\xi^p+r_{p-1}\xi^{p-1}\eta+\ldots+r_0\eta^p,\\
\psi(\xi,\eta)&=(a_{p+1}\xi+b_{p+1}\eta)\ldots(a_{p+q}\xi+b_{p+q}\eta)=s_q\xi^q+s_{q-1}\xi^{q-1}\eta+\ldots+s_0\eta^q,\\
\chi(\xi,\eta)&=\varphi(\xi,\eta)\,\psi(\xi,\eta)=t_{p+q}\xi^{p+q}+t_{p+q-1}\xi^{p+q-1}\eta+\ldots+t_0\eta^{p+q},
\end{aligned}
$$

wo also r, s, t jeweils die homogen gemachten symmetrischen Elementar-

funktionen bedeuten; d. h. diejenigen in jeder einzelnen Reihe linearen symmetrischen Funktionen der Reihen a, b, aus denen sich jeweils alle ganzzahligen symmetrischen Funktionen, die in jeder einzelnen Reihe homogen und gleicher Dimension sind, ganz und ganzzahlig — und zwar nur auf eine Art — zusammensetzen lassen.

Ich bilde nun mit weiteren Unbestimmten $u_{\mu\nu}$ die Linearform

$$\zeta(u, a, b) = \sum u_{\mu\nu} r_\mu s_\nu, \tag{9}$$

die Summation über vorgegebene Indizes μ und ν erstreckt. Das Produkt von $\zeta(u)$ mit allen, durch die Permutation der Reihe a, b entstehenden, von $\zeta(u)$ und unter sich verschiedenen Konjugierten — die Norm $N(\zeta(u))$ von $\zeta(u)$ in bezug auf den Körper der $t(a, b)$, wenn $\zeta(u)$ als Funktion des Körpers der $r_\mu(a, b)$ und $s_\nu(a, b)$ aufgefaßt wird — wird dann eine ganzzahlige symmetrische Funktion aller Reihen a, b, in jeder Reihe homogen und gleicher Dimension, also nach dem obigen eine eindeutig bestimmte, ganze ganzzahlige Funktion der $t(a, b)$ und $u_{\mu\nu}$:

$$N(\zeta(u, a, b)) = T(t(a, b), u) \qquad [\text{identisch in } a, b, u]. \tag{10}$$

Dieselbe Überlegung zeigt, daß auch

$$N(z - \zeta(u)) = z^\delta + T_{\delta-1}(t, u) z^{\delta-1} + \ldots + T(t, u) \quad [\text{identisch in } a, b, u, z]$$

wird, wo alle T ganze, ganzzahlige Funktionen der t und u bedeuten. Beide Seiten dieser Identität verschwinden für $z = \zeta(u)$; und zwar wegen der algebraischen Unabhängigkeit der symmetrischen Elementarfunktionen $r(a,b)$, $s(a,b)$ identisch in r, s, wenn man $t(a, b)$ nach (8) gleich einer ganzzahligen bilinearen Verbindung $w(r, s)$ der r und s setzt, und $\zeta(u)$ als Funktion von r und s auffaßt. Somit kommt

$$\zeta(u)^\delta + T_{\delta-1}(w(r, s), u)\zeta(u)^{\delta-1} + \ldots + T(w(r, s), u) = 0 \tag{11}$$
$$[\text{identisch in } r, s, u]. \text{ *)}$$

Die Identitäten (10) und (11) bleiben erhalten für alle speziellen Wertsysteme α, β von a, b; bzw. ϱ, σ von r, s. Sind ϱ, σ insbesondere so gewählt, daß alle Produkte $\varrho_\mu \sigma_\nu$ verschwinden — wo μ, ν die in (9) auftretenden Indizes bedeuten — so daß also $\zeta(u)$ durch die Substitution verschwindet, so kommt, wenn $w(\varrho, \sigma) = \tau$ gesetzt wird, nach (11):

$$T(\tau, u) = 0 \qquad [\text{identisch in } u]. \tag{12}$$

---

*) (11) stellt, wenn die Summation in (9) über alle Indizes erstreckt wird, die Kroneckersche Erweiterung des Gaußschen Satzes dar, und zwar im wesentlichen in der Kroneckerschen Beweisanordnung (Zur Theorie der Formen höherer Stufen, Berliner Ber. 1883, Werke, 2, S. 417).

Seien umgekehrt $\tau_0, \ldots, \tau_{p+q}$ solche nicht sämtlich verschwindende ***Wertsysteme, daß*** (12) ***erfüllt ist.*** Da in einem algebraischen Erweiterungskörper eine Zerlegung existiert

$$(12)\quad \bar{\chi}(\xi, \eta) = \tau_{p+q}\,\xi^{p+q} + \ldots + \tau_0\,\eta^{p+q} = (\alpha_1\,\xi + \beta_1\,\eta) \ldots (\alpha_{p+q}\,\xi + \beta_{p+q}\,\eta),$$

wo in keinem Faktor α und β gleichzeitig verschwinden[10]), wohl aber einige α oder β verschwinden können, wird $\tau = t(\alpha, \beta)$. Das Einsetzen dieser Werte in (10) zeigt vermöge (12), daß $\zeta(u, \alpha, \beta)$ oder ein konjugierter Faktor identisch in u verschwindet. Setzt man also, nach geeigneter Numerierung von α, β, jetzt $r(\alpha, \beta) = \varrho$, $s(\alpha, \beta) = \sigma$, so heißt das, daß $\bar{\chi}(\xi, \eta)$ ***mindestens eine Zerlegung zuläßt.***

$$(13)\qquad \bar{\chi}(\xi, \eta) = \bar{\varphi}(\xi, \eta)\,\bar{\psi}(\xi, \eta) = \sum \varrho_\varkappa\,\xi^\varkappa\,\eta^{p-\varkappa} \cdot \sum \sigma_\lambda\,\xi^\lambda\,\eta^{q-\lambda},$$

derart daß alle in $\zeta(u)$ ***auftretenden Produkte*** $\varrho_\mu\,\sigma_\nu$ ***verschwinden, nicht aber sämtliche*** ϱ oder σ.

5. Die Gradzahlen p, q in (8) seien jetzt gleich $l d^{n-1}$ und $m d^{n-1}$; d. h. gleich den Graden von $f(\xi)$ und $g(\xi)$ in (5). Die Indizes μ, ν seien zerlegt in $\mu^{(1)}, \nu^{(1)}, \mu^{(2)}, \nu^{(2)}$; dabei durchlaufe $\mu^{(1)}$ alle in $f(\xi)$ fehlenden Exponenten, $\nu^{(1)}$ alle Exponenten von ξ in $\psi(\xi, \eta)$; und entsprechend $\nu^{(2)}$ alle in $g(\xi)$ fehlenden Exponenten, $\mu^{(2)}$ alle Exponenten von ξ in $\varphi(\xi, \eta)$. Es bedeute ferner

$$e(\xi) = \sum Z_{k_1 \ldots k_n}\,\xi^k \qquad (k_1 + \ldots + k_n \leqq l + m)$$

das dem Polynom (3) entsprechende Polynom in einer Veränderlichen;

$$S(Z, u)$$

das ganzzahlige Polynom in Z und u, das aus $T(t, u)$ — der eindeutig bestimmten rechten Seite von (10), wo die Summation in (9) über die angegebenen Indizes $\mu^{(1)}$, $\nu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$, $\nu^{(2)}$ erstreckt wird — dadurch entsteht, daß die t durch die Koeffizienten Z und die entsprechenden Nullen von $e(\xi)$ ersetzt werden.

Ersetzt man jetzt die r, s durch die Koeffizienten A, B und die entsprechenden Nullen von $f(\xi)$ und $g(\xi)$, so ***verschwindet*** durch diese Substitution $\zeta(u)$ bei der angegebenen Summation. Es geht ferner $t = w(r, s)$ über in die Koeffizienten $C(A, B)$ und die entsprechenden Nullen von $h(\xi)$; also geht $T(t, u)$ über in $S(C(A, B), u)$. Nach der Identität (11) kommt somit

$$(14)\qquad S(C(A, B), u) = 0 \qquad [\text{identisch in } A, B, u].$$

---

10) Dieser (rationale) „Fundamentalsatz der Algebra" ist der Existenzsatz, auf dem die am Schlusse von 2. ausgesprochene ausnahmslose Gültigkeit der Umkehrung beruht.

Da (14) erhalten bleibt für jedes spezielle Wertsystem, genügen also die Koeffizienten $\Gamma = C(\mathsf{A}, \mathsf{B})$ solcher spezieller $\bar{H}(x)$ oder allgemeiner $\bar{H}(x, y)$, die in einem ***Erweiterungskörper in zwei Faktoren zerfallen***, der Bedingung

$$S(\Gamma, u) = 0 \qquad [\text{identisch in } u]. \tag{15}$$

Ist umgekehrt für die, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten Γ eines Polynoms $\bar{H}(x)$, bzw. Form $\bar{H}(x, y)$, die Bedingung (15) erfüllt, so ist das nach dem obigen gleichbedeutend mit $T(\tau, u) = 0$, unter τ alle Koeffizienten von $\bar{h}(\xi, \eta)$ verstanden. Nach (13) existiert somit in einem Erweiterungskörper der Γ eine Zerlegung:

$$\bar{h}(\xi, \eta) = \bar{f}(\xi, \eta) \cdot \bar{g}(\xi, \eta),$$

wo in $\bar{f}$ und $\bar{g}$ wegen der angegebenen Summation keine von den induzierten Exponenten verschiedene auftreten; und folglich besteht eine Relation

$$\bar{H}(x, y) = \bar{F}(x, y) \cdot \bar{G}(x, y).$$

Hieraus folgt, sobald für $y = 1$ kein Faktor nullten Grades wird, also insbesondere, wenn die Γ keine Graderniedrigung von $\bar{H}(x)$ bedingen, die weitere Relation

$$\bar{H}(x) = \bar{F}(x) \cdot \bar{G}(x).$$

Die Bedingung (15) ***ist also notwendig und hinreichend dafür, daß*** $\bar{H}(x, y)$, ***und bei Ausschluß von Graderniedrigung auch*** $\bar{H}(x)$, ***in einem Erweiterungskörper in zwei Faktoren zerfällt.***

Daraus folgt noch, daß $S(Z, u)$ nicht identisch in Z und u verschwinden kann, da in 1. gezeigt ist, daß für $n \geqq 2$ die Polynome mit Unbestimmten als Koeffizienten, also auch die entsprechenden homogenen Formen in einer Veränderlichen mehr, absolut irreduzibel sind. Es kommt also, unter U Potenzprodukte der u verstanden:

$$S(Z, u) = \sum \Phi_\lambda(Z)\, U_\lambda,$$

wo die $\Phi_\lambda(Z)$ nach (14) Polynome aus $\mathfrak{P}$ werden. Damit ist ***gezeigt, daß*** $\mathfrak{P}$ ***keine weiteren Nullstellen besitzt als die durch die Parameterdarstellung*** $\Gamma = C(\mathsf{A}, \mathsf{B})$ ***gegebenen, wo*** A ***und*** B ***einen algebraischen Erweiterungskörper der*** Γ ***angehören.*** Die am Schluß von 2. ausgesprochene Umkehrung ist somit bewiesen.

6. ***Die Bedingung der absoluten Irreduzibilität*** läßt sich nun direkt formulieren. Dazu ist die Gradzahl von $E(x)$ in (3) nur auf alle möglichen Arten in zwei positive Summanden $l + m$ zu zerlegen, und zu jeder Zerlegung die Form $S(Z, u)$ zu bilden. Das Produkt über diese Formen

$$R(Z, u) = \Pi\, S(Z, u) \tag{16}$$

bildet dann die ***Reduzibilitätsform von*** $E(x)$; denn nach dem obigen entspricht jedem Zerfallen von $\bar{E}(x)$ bzw. $\bar{E}(x, y)$ das Verschwinden eines Faktors von (16), und umgekehrt. Damit ist der ***in der Einleitung aufgestellte Hauptsatz bewiesen*** und zugleich gezeigt, wie die Reduzibilitätsform sich in endlich vielen Schritten wirklich aufstellen läßt.

7. Aus der ***Existenz der Reduzibilitätsform*** (16) ergibt sich unmittelbar der in der Einleitung erwähnte ***Satz von Ostrowski***. Es sei

$$\bar{E}(x) = \sum \Gamma_{k_1 \ldots k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \qquad (k_1 + \ldots + k_n \leqq \nu)$$

ein absolut irreduzibles Polynom mit ganzen algebraischen Zahlen Γ als Koeffizienten; $\mathfrak{K}$ bezeichne einen endlichen algebraischen Zahlkörper, der alle Γ enthält, $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus $\mathfrak{K}$.

Dann bleibt die für den genauen Grad von $\bar{E}(x)$ gebildete Reduzibilitätsform $R(Z, u)$ von $E(x)$ bei der Substitution $Z = \Gamma$ ***von Null verschieden***; es wird

$$R(\Gamma, u) = \sum P_\lambda U_\lambda \neq 0 \qquad [\text{identisch in } u].$$

Das Ideal $\mathfrak{r} = (P_1, P_2, \ldots)$ wird also nur durch eine ***endliche*** Anzahl von Primidealen aus $\mathfrak{K}$ teilbar. Ist somit $\mathfrak{p}$ von diesen endlich vielen verschieden, so verschwindet $R(\Gamma, u)$ modulo $\mathfrak{p}$ nicht identisch; und, da die Restklassen modulo $\mathfrak{p}$ wieder einen Körper bilden, so folgt, daß $\bar{E}(x)$ ***modulo*** $\mathfrak{p}$ ***irreduzibel***, genauer absolut irreduzibel ist. Dasselbe gilt von $\bar{E}(x, y)$, so daß auch keine Graderniedrigung modulo $\mathfrak{p}$ eintritt.

Sind die Koeffizienten von $\bar{E}(x)$ algebraisch gebrochene Zahlen, so ist $\mathfrak{p}$ auch von den endlich vielen, im gemeinsamen Nenner Δ aufgehenden Primidealen verschieden anzunehmen; modulo aller übrigen Primideale kann $\bar{E}(x)$ durch $\Delta \cdot \bar{E}(x)$ ersetzt werden, so daß die obigen Voraussetzungen erfüllt sind. Damit ist der Satz bewiesen.

Erlangen, August 1921.

(Eingegangen am 28. 8. 1921.)

Über Kriterien für irreduzible und für primitive Gleichungen und über die Aufstellung affektfreier Gleichungen.

Von

Ph. Furtwängler in Wien.

Eines der brauchbarsten Kriterien für die Irreduzibilität algebraischer Gleichungen ist das Eisensteinsche. Die folgenden Entwicklungen enthalten implizite einen neuen Beweis dieses Kriteriums, der mir deshalb bemerkenswert zu sein scheint, weil er sehr leicht zu Verallgemeinerungen führt (§ 1 und 2). Es läßt sich insbesondere auch auf diesem Wege ein Kriterium für primitive Gleichungen herleiten (§ 3). Ich verwende schließlich die gefundenen Kriterien, um in einfachster Weise affektfreie Gleichungen beliebigen Grades [1]) aufzustellen, indem ich die Tatsache benutze, daß irreduzible primitive Gleichungen beliebigen Grades mit genau zwei komplexen Wurzeln affektfrei sind (§ 4).

§ 1.

Satz 1. *Es sei p eine natürliche Primzahl und $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ganze rationale Zahlen, von denen die erste und letzte nicht durch p teilbar sind. Das Polynom*

$$(1) \qquad f(x) = a_0 x^n + p^{e_1} a_1 x^{n-1} + \ldots + p^{e_n} a_n$$

ist dann, wenn von den positiven Zahlen $\frac{e_i}{i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ keine kleiner als $\frac{e_n}{n}$ ist, im natürlichen Rationalitätsbereich $R(1)$ nur in Faktoren zerlegbar, deren Grad ein Multiplum von $\frac{n}{t}$ ist, wo t den größten gemeinsamen Teiler von e_n und n bedeutet. Ist also e_n zu n relativ prim, so ist $f(x)$ irreduzibel.

---

[1]) Daß affektfreie Gleichungen jeden Grades in beliebiger Zahl existieren, hat zuerst Herr D. Hilbert auf Grund seines Irreduzibilitätssatzes bewiesen. Journ. f. Math. **110** (1892), S. 104.

Beweis. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_0 = 1$ annehmen. Macht man in der Gleichung $f(x) = 0$ die Substitution

$$x = y p^{\frac{e_n}{n}},$$

so erhält man nach Division mit p^{e_n} eine Gleichung für y mit dem höchsten Koeffizienten 1, deren sämtliche andere Koeffizienten ganze algebraische Zahlen sind. Es sind daher alle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ durch die ganze algebraische Zahl $p^{\frac{e_n}{n}}$ teilbar. Zerfällt nun $f(x)$ in die Faktoren:

(2) $$f(x) = (x^r + p^{f_1} b_1 x^{r-1} + \ldots + p^{f_r} b_r)(x^s + p^{g_1} c_1 x^{s-1} + \ldots + p^{g_s} c_s),$$

wo die Koeffizienten b_i, c_k zu p prime ganze Zahlen seien, so folgt:

(3) $$f_r \geqq \left[r \cdot \frac{e_n}{n}\right]\text{ [2]}, \qquad g_s \geqq \left[s \cdot \frac{e_n}{n}\right], \qquad f_r + g_s = e_n.$$

Die ersten beiden Ungleichungen ergeben sich daraus, daß $p^{f_r} b_r$ und $p^{g_s} c_s$ das Produkt von r resp. s Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind (abgesehen vom Vorzeichen). Es muß also $f_r \geqq r \cdot \frac{e_n}{n}$ gelten, und da f_r eine ganze Zahl ist, auch $f_r \geqq \left[r \cdot \frac{e_n}{n}\right]$.

Da

$$r \cdot \frac{e_n}{n} + s \cdot \frac{e_n}{n} = e_n$$

ist, können die Relationen (3) offenbar nur zusammen bestehen, wenn $r \cdot \frac{e_n}{n}$ und $s \cdot \frac{e_n}{n}$ ganze Zahlen sind. Ist dann t der gr. g. T. von e_n und n, so muß offenbar r und s ein Multiplum von $\frac{n}{t}$ sein, w. z. b. w.

Das Eisensteinsche Kriterium ist ein spezieller Fall des Satzes 1. Der Beweis verläuft in diesem Falle einfach so: Alle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind durch $p^{\frac{1}{n}}$ teilbar. Soll $f(x)$ in zwei Faktoren zerfallen, so sind die konstanten Glieder dieser Faktoren, da sie mindestens durch eine Wurzel von $f(x) = 0$ teilbar sind, durch $p^{\frac{1}{n}}$ teilbar. Da sie aber ganze rationale Zahlen sind, müßten sie durch p teilbar sein, was zu einem Widerspruch führt.

§ 2.

Der Satz 1 läßt sich in folgender Weise verallgemeinern.

Satz 2. *Es sei p eine natürliche Primzahl und $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ganze rationale Zahlen, die nicht durch p teilbar sind. Das Polynom*

$$f(x) = a_0 x^n + p^{e_1} a_1 x^{n-1} + \ldots + p^{e_{n-1}} a_{n-1} x + p^{e_n} a_n$$

[2]) $[x]$ bedeutet die kleinste ganze Zahl, die nicht kleiner als x ist.

ist dann, wenn von den positiven Zahlen $\frac{e_i}{i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *keine kleiner als* $\frac{e_{n-k}}{n-k}$ *ist, in* $R(1)$ *entweder irreduzibel oder es existiert, wenn es reduzibel ist, stets ein Faktor, dessen Grad die Gestalt*

$$\lambda \cdot \frac{n-k}{t} + \mu$$

hat, wo t der gr. g. T. von e_{n-k} *und* $n - k$ ist *und* λ, μ *ganze Zahlen bedeuten, welche die Ungleichungen*

$$\lambda > 0, \qquad 0 \leqq \mu \leqq k$$

befriedigen. Ist e_{n-k} *zu* $n - k$ *teilerfremd, so hat also* $f(x)$, *wenn es reduzibel ist, stets einen Faktor, dessen Grad nicht kleiner als* $n - k$ *ist.*

Beweis: Zerfällt $f(x)$ in der in (2) angegebenen Art, so setzt sich der Koeffizient von x^k als Summe von Termen zusammen, die resp. durch $p^{f_{r-k'} + g_{s-k''}}$ teilbar sind, wo k' und k'' zwei ganze Zahlen sind, welche die Bedingungen:

$$0 \leqq k' < r, \qquad 0 \leqq k'' < s, \qquad k' + k'' = k$$

befriedigen. Da der Koeffizient von x^k genau durch $p^{e_{n-k}}$ teilbar ist, muß wenigstens eine Kombination k', k'' existieren, so daß

$$f_{r-k'} + g_{s-k''} \leqq e_{n-k}$$

ist.

Bei unseren Annahmen sind alle Wurzeln von $f(x) = 0$ durch $p^{\frac{e_{n-k}}{n-k}}$ teilbar. Es ist daher:

$$f_{r-k'} \geqq \left[(r - k') \cdot \frac{e_{n-k}}{n-k}\right], \qquad g_{s-k''} \geqq \left[(s - k'') \cdot \frac{e_{n-k}}{n-k}\right],$$

also

$$f_{r-k'} + g_{s-k''} \geqq \{(r - k') + (s - k'')\} \cdot \frac{e_{n-k}}{n-k} = e_{n-k}.$$

In der letzten Ungleichung kann das Gleichheitszeichen nur eintreten, wenn

$$(r - k') e_{n-k} \equiv (s - k'') e_{n-k} \equiv 0 \ (n - k)$$

ist. Ist der gr. g. T. von e_{n-k} und $n - k$ gleich t, so folgt

$$r - k' \equiv s - k'' \equiv 0 \left(\frac{n-k}{t}\right)$$

d. h.

$$r = \lambda' \cdot \frac{n-k}{t} + k', \qquad s = \lambda'' \cdot \frac{n-k}{t} + k''.$$

Da wegen $k' + k'' = k < n$ nicht gleichzeitig $\lambda' = \lambda'' = 0$ sein kann, ist unser Satz bewiesen.

Die vorstehenden Sätze enthalten neben dem Eisensteinschen Kriterium die im Anschluß daran von Königsberger[3]) und Netto[4]) entwickelten Resultate. Insbesondere ist der spezielle Fall des Satzes 1, daß e_n und n relativ prim sind, bereits von Königsberger angegeben und der Beweis für $n = 5$ in etwas umständlicher Weise durch Diskussion aller möglichen Arten der Zerlegung von $f(x)$ ausgeführt.

Man kann auf dem hier durchgeführten Wege auch Sätze über die Zerlegungsmöglichkeiten von Polynomen

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-k} x^k$$
$$+ p^{e_1} a_{n-k+1} x^{k-1} + \dots + p^{e_{k-1}} a_{n-1} x + p^{e_k} a_n$$

gewinnen, wenn man die Substitution $x = \frac{p^e a_n}{y}$ ausführt und $e \leqq e_k$ so wählt, daß in dem Polynom in y, das man durch Multiplikation mit $\frac{y^n}{p^{e_k} a_n}$ erhält, alle Koeffizienten mit Ausnahme des ersten durch p teilbar werden. Doch soll hier darauf nicht näher eingegangen werden.

§ 3.

In analoger Weise wie der Eisensteinsche Satz die Irreduzibilität einer Gleichung sichert, kann man auch ihre Primitivität erzwingen. Dies kann z. B. auf folgende Art geschehen.

Satz 3. *Sind in der ganzzahligen irreduziblen Gleichung $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ alle Koeffizienten a_i durch die Primzahl p teilbar und zwar a_{n-1} genau durch p, a_n aber mindestens durch p^2, so ist die Gleichung primitiv.*

Beweis. Soll die Gleichung imprimitiv sein, muß $n = rs$ sein und eine Zerlegung existieren:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$
$$= (x^r + \xi_1^{(1)} x^{r-1} + \dots + \xi_r^{(1)})(x^r + \xi_1^{(2)} x^{r-1} + \dots + \xi_r^{(2)}) \dots$$
$$\dots (x^r + \xi_1^{(s)} x^{r-1} + \dots + \xi_r^{(s)}),$$

wo die Zahlen $\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \dots, \xi_j^{(s)}$ konjugierte ganze Zahlen in s konjugierten algebraischen Zahlkörpern sind. Ist α_i eine Wurzel der gegebenen Gleichung, so ist α_i durch $p^{\frac{1}{n-1}}$ teilbar. Es mögen nun die Zahlen $\xi_r^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots, s)$ der Gleichung:

$$u^s + b_1 u^{s-1} + \dots + b_{s-1} u + b_s = 0$$

[3]) L. Königsberger, Journ. f. Math. 115 (1895), S. 53.

[4]) E. Netto, Vorlesungen über Algebra 1, S. 56–64.

genügen. Es sind dann alle Koeffizienten b_i durch p und $b_s = \pm a_n$ mindestens durch p^2 teilbar. Daher sind alle $\xi_r^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ durch $p^{\frac{1}{s-1}}$ teilbar.

Die Zahlen $\xi_{r-1}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ mögen der Gleichung

$$v^s + c_1 v^{s-1} + \ldots + c_{s-1} v + c_s = 0$$

genügen, in der alle Koeffizienten c_i durch p teilbar sein müssen; daher sind alle $\xi_{r-1}^{(i)}$ durch $p^{\frac{1}{s}}$ teilbar. Es ist nun

$$a_{n-1} = \sum \xi_r^{(1)} \xi_r^{(2)} \ldots \xi_r^{(s-1)} \xi_{r-1}^{(s)}.$$

E müßte daher a_{n-1} durch $p^{(s-1)\cdot\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s}} = p^{1+\frac{1}{s}}$, also auch durch p^2 teilbar sein, was gegen die Voraussetzung ist. Die vorgelegte Gleichung ist also primitiv.

Der vorstehende Satz läßt sich verallgemeinern, was jedoch nicht näher ausgeführt werden soll.

§ 4.

Wir wollen jetzt die bisherigen Ausführungen anwenden, um affektfreie Gleichungen beliebigen Grades aufzustellen. Wir beweisen zu diesem Zweck zunächst

Satz 4. *Eine irreduzible Gleichung, die genau zwei komplexe Wurzeln besitzt, ist, wenn sie primitiv ist, affektfrei* [5]).

Beweis. Der Grad der Gleichung sei n. Sind die beiden komplexen Wurzeln x_1, x_2, so enthält die Gruppe der Gleichung die Transposition (12). Ich bezeichne mit $\mathfrak{S}_r$ generell die symmetrische Permutationsgruppe von r Ziffern. Sollen die zu permutierenden Ziffern $i_1, i_2, \ldots, i_r$ besonders bezeichnet werden, schreibe ich $\mathfrak{S}_r(i_1, i_2, \ldots, i_r)$. Es ist nachzuweisen, daß die Gruppe unserer Gleichung $\mathfrak{S}_n$ ist. Die Gruppe besitzt sicher eine $\mathfrak{S}_2$ als Untergruppe. Es sei nun $\mathfrak{S}_r(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ eine Gruppe mit maximalem r, die in der Gruppe der Gleichung enthalten ist. Wenn $r < n$ ist, so gibt es eine von den i_k verschiedene Ziffer j_1 und wegen der Transitivität enthält die Gruppe der Gleichung eine Permutation P, die i_1 in j_1 überführt. Bildet man nun

$$P^{-1}\mathfrak{S}_r(i_1, i_2, \ldots, i_r)P = \mathfrak{S}_r(j_1, j_2, \ldots, j_r),$$

so sind alle j von allen i verschieden. Denn wäre etwa $j_l = i_1$, so enthielte die Gleichungsgruppe die Transpositionen $(i_1, i_2), (i_1, i_3), \ldots, (i_1, i_r), (j_l, j_1) = (i_1 j_1)$ und daher eine $\mathfrak{S}_{r+1}$, was gegen die Annahme

[5]) Vgl. H. Weber, Lehrbuch der Algebra 1, 2. Aufl., § 160.

ist. Man kann das Verfahren fortsetzen und die Ziffern $1, 2, \ldots, n$ in Systeme von je r Ziffern einteilen, von denen keine zwei eine Ziffer gemeinsam haben. Daraus folgt zunächst, daß r ein Teiler von n sein muß, weil man anderenfalls sicher zu einem System von r Ziffern gelangen würde, das mit einem früheren eine Ziffer gemeinsam hat.

Ist $r = n$, so ist die Gleichung affektfrei; ist $r < n$, so ist sie imprimitiv. Denn es lassen sich die Wurzeln in s Systeme von je r Wurzeln mit den Indizes

$$\begin{array}{c} i_1, i_2, \ldots, i_r \\ j_1, j_2, \ldots, j_r \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ s_1, s_2, \ldots, s_r \end{array}$$

einteilen und bei irgendeiner Permutation der Gleichungsgruppe müssen die Zeilen wieder in Zeilen übergehen, weil andernfalls eine $\mathfrak{S}_{r+1}$ in der Gruppe enthalten wäre. Damit ist unser Satz bewiesen.

Satz 5. *Sind $b_1, b_2, \ldots, b_{n-4}$ verschiedene ganze Zahlen größer als* 1, *so ist die Gleichung n-ten Grades*:

$$x^4(x - 2b_1)(x - 2b_2)\ldots(x - 2b_{n-4}) - (-1)^n(2x + 4) = 0 \qquad (n \geqq 4)$$

affektfrei.

Beweis. 1. Sie ist irreduzibel. Zunächst kann sie keinen linearen Faktor enthalten, denn ± 1, ± 2, ± 4 sind keine Wurzeln der Gleichung. Zerfiele sie in zwei nichtlineare Faktoren

$$(x^m + c_1 x^{m-1} + \ldots + c_m)(x^l + d_1 x^{l-1} + \ldots + d_l),$$

so würde

$$c_i \equiv d_k \equiv 0 (2) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, l \end{pmatrix}$$

folgen, da alle Wurzeln der vorgelegten Gleichung durch $2^{\frac{1}{n-1}}$ teilbar sind. Es müßte dann der Koeffizient von x durch 4 teilbar sein, was nicht der Fall ist.

2. Sie ist primitiv nach Satz 3 ($p = 2$).

3. Sie besitzt genau zwei komplexe Wurzeln[*]). Denn setzt man ihre linke Seite gleich $F(x)$ und nimmt an, daß

$$b_1 > b_2 > \ldots > b_{n-4} > 1$$

[*]) Vgl. I. Schur, Jahresber. d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung **29** (1920), S. 149.

sei, so gilt für gerades n:

$$F(+\infty) > 0,\ F(2b_1 - 1) < 0,\ F(2b_2 - 1) > 0, \ldots, F(2b_{n-4} - 1) > 0,$$
$$F(0) < 0,\quad F(-\infty) > 0,$$

für ungerades n:

$$F(+\infty) > 0,\ F(2b_1 - 1) < 0,\ F(2b_2 - 1) > 0, \ldots, F(2b_{n-4} - 1) < 0,$$
$$F(0) > 0,\quad F(-\infty) < 0.$$

Damit ist die Existenz von $n - 2$ reellen Wurzeln dargetan. Da wegen des Fehlens zweier aufeinanderfolgender Glieder nicht alle Wurzeln reell sein können, muß die Gleichung $F(x) = 0$ $n - 2$ reelle und zwei komplexe Wurzeln besitzen. Sie ist daher nach Satz 4 affektfrei.

(Eingegangen am 2. 8. 1921.)

Über die Lage der Nullstellen von Polynomen, die aus Minimumforderungen gewisser Art entspringen.

Von

Leopold Fejér in Budapest.

Einleitung.

1. Es bezeichne P eine beliebige Punktmenge in der Ebene, die im Endlichen gelegen ist. Sie besteht entweder aus einer endlichen Anzahl von Punkten oder aus unendlich vielen Punkten. Im letzteren Falle will ich voraussetzen, daß sie abgeschlossen ist. Außer der Punktmenge P sei nun in der Ebene irgendein Punkt A angenommen. Ich frage: Gibt es in der Ebene einen zweiten Punkt B, der zu jedem einzelnen Punkte der Menge P näher gelegen ist als der Punkt A zu demselben Punkte der Menge? D. h. gibt es einen solchen Punkt B, daß $\overline{pB} < \overline{pA}$, wenn p sämtliche Punkte der Menge P durchläuft?

Die Antwort ist bejahend, falls A im Äußern des kleinsten konvexen Bereiches K liegt, der die Punktmenge P enthält. In diesem Falle läßt sich nämlich in der Ebene eine gerade Linie L ziehen, welche die Ebene so in zwei Halbebenen H_1, H_2 teilt, daß die Punktmenge P in das Innere von H_1, der Punkt A in das Innere von H_2 fällt. Ziehe ich nun durch A die Senkrechte zu L, und schneidet diese die Gerade L im Punkte C, so besteht die geradlinige Strecke AC (den Punkt A natürlich ausgenommen) offensichtlich aus lauter solchen gesuchten Punkten B, die also zu jedem einzelnen Punkte der Menge P näher gelegen sind als A selbst.

2. In den folgenden Zeilen soll nun gezeigt werden, daß aus der eben erwähnten, fast evidenten geometrischen Tatsache (laut welcher sich immer ein Punkt B finden läßt, der zu jedem einzelnen Punkte einer Menge P näher gelegen ist als der Punkt A zu demselben Punkte der Menge, falls A im Äußern der konvexen Hülle von P liegt) unmittelbar ein allgemeiner Satz (§ 3) folgt, der sich auf die Lage der Nullstellen von ganzen rationalen Funktionen der komplexen Variablen bezieht, die aus einer Minimumforderung gewisser

Art entspringen. Namentlich ergibt sich, daß die Nullstellen solcher Polynome in der konvexen Hülle der Menge P gelegen sind. Die Sätze über die Realität der Nullstellen der Tschebyscheffschen (§ 1) und Legendreschen (§ 2) Polynome und ihrer Verallgemeinerungen werden dann aus diesem allgemeinen Satze durch äußerste Spezialisierung gewonnen. Gewisse hier auftretende Polynomfolgen $P_n(x)$ sind orthogonal in bezug auf ein reelles Intervall. In diesem Falle — wo die allgemeine Theorie Herrn Hilbert so viel zu verdanken hat — kann man die Realität der Nullstellen und noch mehr aus der Orthogonalität erschließen. Mein Ziel war, das für die Nullstellen der in § 3 charakterisierten Polynomfolgen Gemeinsamgültige zu bestimmen, und von der ursprünglichen Minimumseigenschaft aus (unter Vermeidung der eventuell bestehenden Orthogonalitätseigenschaft) geometrisch in Evidenz zu setzen.

3. In Nr. 1 wurde gezeigt, daß, wenn der Punkt A außerhalb der konvexen Hülle K von P liegt, man immer einen Punkt B in der Ebene finden kann, der zu jedem einzelnen Punkte von P näher liegt als der Punkt A. Ich erwähne nun, obgleich ich von dieser Tatsache in dieser Note keinen Gebrauch machen werde, daß diese Eigenschaft der Außenpunkte von K für diese geradezu charakteristisch ist. Es sei nämlich jetzt A ein Punkt der konvexen Hülle K selbst. Nehme ich an, daß jeder einzelne Punkt von P zu einem Punkte B der Ebene näher wäre als zum Punkte A (also stets $\overline{pB} < \overline{pA}$ wäre, wenn p die Menge P durchläuft), so folgt daraus zunächst, daß die ganze Punktmenge P in jener Halbebene H liegt, die durch die Halbierungssenkrechte der Strecke BA begrenzt wird, und den Punkt B in ihrem Innern enthält. Daraus folgt dann weiter, daß auch die konvexe Hülle K von P ganz in H fällt, was aber der Annahme, daß A ein Punkt von K ist, widerspricht, da doch A außerhalb von H (nämlich im Innern der andern Halbebene) liegt.

Zusammenfassend kann ich also kurz sagen: Ist A außerhalb der konvexen Hülle von P, so kann ich mich von A aus der Menge P „nähern" (d. h. gleichzeitig jedem Punkte von P), gehört aber A zur Hülle K, so ist dies unmöglich.

Diese Charakterisierung des kleinsten konvexen Körpers, der eine gegebene Punktmenge P enthält, kann natürlich auf einen Raum von beliebig vielen Dimensionen übertragen werden[1]).

---

[1]) Der Inhalt dieser Note ist im Auszuge im Rahmen der Arbeit des Herrn G. Szegö: Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören [Mathematische Zeitschrift **9** (1921), S. 218–270], veröffentlicht (siehe insbesondere § 3, S. 236–241), und auch die nächstens in den Proceedings of the London Mathematical Society von Herrn Karl Jordan erscheinende Arbeit: „Sur une série de polynomes dont chaque somme partielle représente la meilleure approximation d'un degré donné suivant la méthode des moindres carrés" gibt ganz kurz den Inhalt dieser Note wieder. — Schließlich bemerke ich, daß diese Note im Frühjahr

§ 1.

Über die Lage der Nullstellen von Polynomen, welche die Tschebyscheffsche Abweichung von der Null minimalisieren.

4. Es sei P eine beschränkte, endliche oder unendliche (im letzterem Falle aber abgeschlossene) Punktmenge in der Ebene der komplexen Variablen x. Es bezeichne $g_n(x)$ eine ganze rationale Funktion n-ten Grades von der Form

$$g_n(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_n, \tag{1}$$

wo $c_1, c_2, \ldots, c_n$ beliebige komplexe Zahlen bedeuten. Weiter bezeichne p die den Punkten von P entsprechenden komplexen Zahlen. Dann hat $|g_n(p)|$ „in P" (d. h. für die Punkte von P) gewiß ein Maximum, das auch die „Tschebyscheffsche Abweichung" (écart) von der Null in P genannt werden kann. Unter einem Tschebyscheffschen Polynom n-ten Grades $T_n(x)$ in bezug auf P verstehe ich nun ein Polynom $T_n(x)$ von der Form (1), für welches in P

$$\operatorname{Max} |T_n(p)| \leqq \operatorname{Max} |g_n(p)| \tag{2}$$

gültig ist, wobei $g_n(x)$ irgendein Polynom der Form (1) bedeutet[3]).

Satz I. *Ein zur Punktmenge P gehöriges Tschebyscheffsches Polynom n-ten Grades $T_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ hat Nullstellen, die alle in den kleinsten konvexen Bereich fallen, der die Punktmenge P enthält, (vorausgesetzt, daß die Anzahl der Punkte der Menge mindestens gleich n ist.)*

Beweis. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Nullstellen von $T_n(x)$. Würde nun eine dieser Stellen, etwa x_1, in das Äußere der konvexen Hülle von P fallen, so könnte ich, auf Grund von Nr. 1, einen komplexen Wert ξ finden, so daß $|p - \xi| < |p - x_1|$ für jedes p in P. Bezeichnet also $h_n(x)$ das Polynom $(x-\xi)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n) = x^n + \ldots$, so wäre, in P,

$$\begin{aligned} |h_n(p)| &= |p-\xi|\,|p-x_2|\,|p-x_3|\ldots|p-x_n| \\ &\leqq |p-x_1|\,|p-x_2|\ldots|p-x_n| = |T_n(p)|. \end{aligned}$$

1919 entstanden ist, als Herr G. Szegö mir seinen schönen Satz VII auf S. 237 seiner soeben zitierten Arbeit mündlich mitgeteilt hatte. (Auf die Szegösche Arbeit sei auch in bezug auf die neueste einschlägige Literatur hingewiesen.)

[3]) Die Frage der Existenz, Unität (die nicht immer stattfindet) und Bestimmung der durch die Minimumseigenschaft charakterisierten Polynome wird in dieser Note nicht berührt; zu den hierhergehörigen, bei Herrn Szegö auf S. 239, Fußnote [21]) angeführten und besonders auf Herrn L. Tonelli hinweisenden literarischen Angaben sei noch hinzugefügt: Ch.-J. de la Vallée Poussin: Sur les polynomes d'approximation à une variable complexe [Bull. de l'Acad. royale de Belgique (Classe des sciences) **3** (1911), S. 199–211].

Hier kann die Gleichheit offenbar nur dann stattfinden, wenn das Polynom $(n-1)$-ten Grades $(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)$ für den Wert p verschwindet; dann ist $|h_n(p)| = |T_n(p)| = 0$. Für die übrigen Werte p von P ist tatsächlich $|h_n(p)| < |T_n(p)|$, und es ist zu betonen, daß mindestens *ein* solcher Wert von p existiert, da doch, nach Voraussetzung, die Anzahl der Punkte von P mindestens gleich n ist und $(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)$ nicht für mehr als $(n-1)$ Punkte verschwinden kann.

Also ist (da die Punktmenge P entweder endlich oder abgeschlossen ist)

$$\operatorname{Max}|h_n(p)| < \operatorname{Max}|T_n(p)| \quad \text{in } P.$$

Dies widerspricht aber der für $T_n(x)$ festgesetzten Definitionsungleichung (2).

Ist die Anzahl der Punkte von P kleiner als n (ein leicht beherrschbarer trivialer Fall), so kann eine Wurzel von $T_n(x)$ auch außerhalb der konvexen Hülle von P liegen.

5. Spezielle Fälle. a) $n = 1$, *P beliebig*. Schreibe ich $T_1(x) = x - c$, so entspricht der Zahl c in der Ebene der Mittelpunkt der kleinsten Kreisscheibe, durch welche die Punktmenge P überdeckt werden kann. Satz I besagt nun, daß der Mittelpunkt des kleinsten Deckungskreises von P in die konvexe Hülle von P fällt (ein Satz der sich natürlich auch anders, und ganz elementar beweisen läßt). Ich bemerke, daß dieser Kreismittelpunkt auch auf den Rand der konvexen Hülle von P fallen kann, und zwar auch dann, wenn P zweidimensional ist. (Z. B. im Falle, wo P eine Halbkreisfläche ist.)

b) *n beliebig, P spezialisiert.* Besteht P aus den Punkten eines konvexen Gebietes G, so besagt Satz I, daß die Nullstellen eines zugehörigen $T_n(x)$ alle in G fallen. Ist speziell G die geradlinige Strecke $-1 \leqq x \leqq +1$, so besagt der Satz I, daß die Wurzeln von $T_n(x) = 0$ alle reell sind, und in das Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ fallen, eine wohlbekannte Tatsache. (Hier sei aber bemerkt, daß der Satz I auch dann ganz allgemein gültig ist, wenn in der Definition von $T_n(x)$ nur Polynome von der Form (1) mit *reellen Koeffizienten* zugelassen werden, vorausgesetzt, daß die Punktmenge P in bezug auf die reelle Axe *symmetrisch* ist. Der obige Beweis erleidet hier nur die unerhebliche Modifikation, daß im allgemeinen nicht *ein* Punkt x_1, sondern ein zur reellen Achse symmetrisches *Punktpaar* x_1, x_2 der Menge P „nähergerückt" wird.)

§ 2.

Über die Lage der Nullstellen von Polynomen, welche die Besselsche Abweichung von der Null minimalisieren.

6. Der Satz I sagt aus, daß ein Polynom $T_n(x)$ aus der Menge der Polynome

$$(1) \quad \begin{gathered} g_n(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n \\ (c_1, c_2, \ldots, c_n \quad \text{beliebige komplexe Zahlen}), \end{gathered}$$

für welches die „Tschebyscheffsche Abweichung“ (kurz: T-Abweichung) von der Null in P minimal ist, lauter in die konvexe Hülle von P fallende Nullstellen besitzt.

Hier sei nun gezeigt, daß derselbe Satz auch für die Polynome $B_n(x)$ minimaler „Besselscher Abweichung“ (kurz: B-Abweichung) gültig ist.

Die T-Abweichung eines $g_n(x)$ von der Null wurde für eine *beliebige* abgeschlossene Punktmenge P definiert; sie bedeutet $\text{Max}\,|g_n(x)|$ in P.

Die B-Abweichung kann ich nicht für eine beliebige (abgeschlossene) Punktmenge P definieren. Ich betrachte nur die folgenden, wichtigsten, speziellen Fälle:

α) Die Punktmenge P besteht aus einer endlichen Anzahl von Punkten $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Unter B-Abweichung von der Null in P eines $g(x)$ verstehe ich dann

$$(3) \quad \frac{|g(p_1)|^2 + |g(p_2)|^2 + \ldots + |g(p_k)|^2}{k}.$$

β) P besteht aus den Punkten p eines rektifizierbaren (geschlossenen oder ungeschlossenen) Kurvenbogens. Unter B-Abweichung von der Null in P eines $g(x)$ verstehe ich dann

$$(4) \quad \frac{1}{l}\int |g(p)|^2 ds,$$

wo ds das Bogenelement am Punkte p bedeutet, die Integration über den Kurvenbogen P zu erstrecken ist, und l die Länge von P bezeichnet.

γ) P besteht aus den Punkten eines durch eine geschlossene Kurve umgrenzten Gebietes vom Flächeninhalte f. Dann sei unter B-Abweichung von der Null in P der Wert

$$(5) \quad \frac{1}{f}\iint |g(p)|^2 df$$

verstanden, wo df das Flächenelement zum Punkte p bedeutet, und die doppelte Integration über die Fläche P zu erstrecken ist[3]).

[3]) Zieht man aus den Werten (3), (4) und (5) die nichtnegative Quadratwurzel, dann bekommen sie den Charakter eines Mittelwertes.

7. Wie eben erwähnt, gilt dann folgender

Satz II. *Ist die Besselsche Abweichung von der Null für ein Polynom $B_n(x)$ der Polynommenge* (1) *in der Punktmenge P minimal, so liegen die Nullstellen von $B_n(x)$ alle in dem kleinsten konvexen Bereiche, der die Punktmenge P enthält* (*vorausgesetzt, daß die Anzahl der Punkte der Menge P mindestens gleich n ist*).

Der Beweis ist mit dem des Satzes I fast identisch. Würde die Nullstelle x_1 von $B_n(x)$ außerhalb der Hülle von P liegen, so wäre, wenn $x_2, x_3, \ldots, x_n$ die übrigen Nullstellen von $B_n(x)$ und ξ einen durch „Näherrückung" von x_1 zu P entstandenen Punkt bedeutet, $(x-\xi)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ ein Polynom von der Form (1), dessen absoluter Betrag in *jedem* Punkte p des abgeschlossenen P, (wo indessen $(p-x_2)\ldots(p-x_n) \neq 0$), kleiner wäre als $|B_n(p)|$, dessen Besselsche Abweichung von der Null in P also entschieden *kleiner* wäre als die von $B_n(x)$. Dies widerspricht aber der Definition von $B_n(x)$.

8. Der Satz II wurde im Falle, wo P aus einer endlichen Anzahl von reellen Zahlen besteht (ein Fall, der zum Falle α) in Nr. 6 gehört), durch Herrn Karl Jordan, im Falle wo P aus einer Kurve besteht (Fall β) in Nr. 6), durch Herrn G. Szegö ausgesprochen und bewiesen[4]). Der Satz, laut welchem die Nullstellen des n-ten Legendreschen Polynoms alle reell sind und in das Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ fallen, ist ein spezieller Fall dieses Szegöschen Satzes, den man erhält, wenn man für P die geradlinige Strecke $-1 \leqq x \leqq +1$ wählt (da das, mit einem gehörigen konstanten Faktor versehene Legendresche Polynom das Integral

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} |x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n|^2 \, dx$$

minimalisiert). Der (übrigens äußerst einfache) Beweis der genannten Autoren stützt sich aber (wie ein klassischer Beweis für den Legendreschen Spezialfall) auf die, in diesem Besselschen Falle der Abweichung geltenden „Orthogonalitätseigenschaft" der Polynomfolge $B_0(x) = 1,\ B_1(x), \ldots, B_n(x), \ldots$, während der hier mitgeteilte Beweis den Satz unmittelbar aus der Definitionsminimaleigenschaft deduziert. Es ist vielleicht nicht uninteressant, besonders hervorzuheben, daß speziell der Satz von der Realität der Nullstellen des Legendreschen Polynoms einfach aus dem Umstande gefolgert wird, daß man sich von jedem außerhalb der Strecke $-1 \leqq x \leqq +1$ befindlichen Punkte der Ebene aus der Strecke selbst in dem Sinne „nähern" kann, daß man sich jedem Punkte dieser Strecke gleichzeitig nähert.

Schließlich sei bemerkt, daß der Satz II auch dann gültig ist, wenn in die

---

[4]) S. Fußnote [1]) vorliegender Arbeit.

Definition der B-Abweichung eine nichtnegative „Gewichtfunktion" eintritt, wenn also, z. B. im Falle β) in Nr. 6, für die B-Abweichung das Integral

$$\frac{1}{l}\int \varphi(p)|g(p)|^2 ds$$

maßgebend ist, wo $\varphi(p)$ eine gegebene nichtnegative Funktion des Ortes p auf der Kurve P bedeutet. (Entsprechende Bemerkung für die Fälle α), γ) in Nr. 6.)

§ 3.

Verallgemeinerung. Abweichung allgemeiner Art.

9. Im Satze I und II wurden jene Polynome $P_n(x)$ betrachtet, welche die Tschebyscheffsche bzw. Besselsche Abweichung von der Null in P minimalisieren.

Es sei nun irgendeine Definition der „Abweichung" von der Null in P festgelegt; ihr Wert sei für das Polynom $g(x)$ durch A_g bezeichnet, und die einzige Beschränkung, der der Zusammenhang zwischen g und dem nichtnegativen A unterworfen sei, bestehe in der Ungleichung:

$$A_g < A_h,$$

falls in der Punktmenge P überall die Ungleichung

$$|g(p)| < |h(p)|$$

besteht, wo $|h(p)| \neq 0$, und $|g(p)| = |h(p)|$, wo $|h(p)| = 0$.

10. Auf Grund des Vorhergehenden kann ich unmittelbar folgenden Satz aussprechen:

Satz III. *Wenn ein Polynom $P_n(x)$ der Menge* (1) *die Abweichung von der Null A_{g_n} in P minimalisiert, so liegen seine Nullstellen alle in der konvexen Hülle von P, wenn jedesmal $A_g < A_h$ stattfindet, falls $g(x)$, $h(x)$ Polynome der Menge* (1) *bedeuten, für welche in P überall dort, wo $h(p) \neq 0$, die Ungleichung $|g(p)| < |h(p)|$, und überall dort, $h(p) = 0$, die Gleichheit $|g(p)| = |h(p)| = 0$ stattfindet.* (*Hier ist der triviale Fall, in welchem die Anzahl der Punkte von P kleiner als n ist, außer Acht gelassen.*)

Dieser Satz III umfaßt die Sätze I und II und verallgemeinert sie in beträchtlichem Maße. Aus ihm erhellt z. B., daß ein Polynom (1), für welches in P

$$\frac{1}{l}\int |g_n(p)| ds,$$

erstreckt über einen rektifizierbaren Kurvenbogen P, Minimum ist, lauter Nullstellen besitzt, die in der konvexen Hülle des Bogens P liegen. Durch weitere Spezialisierung: nicht nur das Legendre-Polynom, welches den Wert

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} |x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n|^2 dx \qquad (c_1, \ldots, c_n \text{ beliebig komplex})$$

minimalisiert, sondern auch das Polynom, welches den Wert

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} |x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n|\, dx$$

minimalisiert, hat lauter reelle Nullstellen, die in das Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ fallen. Aber auch dasjenige Polynom, für welches z. B.

$$\int_{-1}^{+1} e^{|x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n|}\, dx$$

minimal wird; usw.

Budapest, den 21. Juni 1921.

(Eingegangen am 25. 6. 1921.)

Über die Separation komplexer Wurzeln algebraischer Gleichungen.

Von

Aubrey J. Kempner in Urbana (U. S. A.).

I. Allgemeines.

§ 1.

Zur Trennung der komplexen Wurzeln einer algebraischen Gleichung kann man, wie wir zeigen wollen, in einfacher Weise die Argumente der Koeffizienten systematisch heranziehen. Als praktisch wichtigen Fall schließt dies ein, daß für Gleichungen mit reellen Koeffizienten bereits die Vorzeichen in gewissem Umfange Aussagen über die Verteilung der komplexen Wurzeln zu machen gestatten.

Sei die vorgelegte Gleichung mit ganzzahligen positiven Exponenten

$$(1)\quad \begin{array}{c} f(z) = a_{n_1} z^{n_1} + a_{n_2} z^{n_2} + \ldots + a_0 = 0; \qquad n_1 > n_2 > \ldots; \\ a_n = r_{n_j} e^{i\Theta_{n_j}}, \; 0 \leqq \Theta_{n_j} < 2\pi, \; r_{n_i} > 0; \quad z = \varrho e^{i\varphi}, \; 0 \leqq \varphi < 2\pi, \; \varrho > 0. \end{array}$$

In der Ebene der komplexen Zahlen denken wir uns vom Nullpunkte aus die Halbstrahlen oder Vektoren Θ_{n_j} markiert. Der Vektor Θ_0 soll seine Richtung beibehalten; der Vektor Θ_1 soll mit konstanter Winkelgeschwindigkeit sich im positiven Sinne drehen, während gleichzeitig der Vektor Θ_j, $j > 1$, sich mit konstanter, j-facher, Winkelgeschwindigkeit im positiven Sinne dreht. In jedem Augenblick repräsentieren dann die Vektoren die Richtungen der die Terme $a_{n_j} z^{n_j} = r_{n_j} \varrho^{n_j} e^{i(\Theta_{n_i} + n_j \varphi)}$, $j = 1, 2, \ldots$, und $a_0 = r_0 e^{i\Theta_0}$ darstellenden Vektoren. Diese Richtungen hängen allein ab von φ und den vorgegebenen Θ_{n_i}. Bis auf einige Spezialfälle sind die abzuleitenden Sätze direkte Folgerungen des Satzes, daß die Summe der von einem Punkte ausgehenden Vektoren bestimmt nicht verschwinden kann, wenn sich durch den Punkt eine Gerade legen

läßt, derart, daß alle Vektoren auf einer Seite der Geraden liegen[1]). Dabei dürfen Vektoren in die Gerade selbst fallen, jedoch muß mindestens ein Vektor nicht in der Geraden liegen. Wenn wir daher φ das Intervall $(0, 2\pi)$ durchlaufen lassen, werden in allen Teilintervallen, innerhalb deren alle Vektoren auf einer Seite einer Geraden liegen (falls derartige Intervalle existieren), sicher keine Wurzeln von $f(z) = 0$ vorhanden sein, welches auch die zwischen $0, +\infty$ liegenden Werte der r_{n_j} sein mögen. Wir werden zeigen, daß auf diese Weise für alle trinomischen Gleichungen eine (im wesentlichen vollständige) Separation aller Wurzeln hergestellt wird (vgl. § 5), und daß wir für k-nomische Gleichungen, $k > 3$, oft wertvolle Auskunft erhalten, obwohl diese Auskunft mit wachsendem k weniger präzis zu werden strebt. Von zwei Gleichungen gleicher Gliederanzahl erhält man oft wertvollere Auskunft für die Gleichung höheren Grades als für die Gleichung niedrigeren Grades. — Die Betrachtungen lassen sich unmittelbar ausdehnen auf Gleichungen mit negativen ganzzahligen Exponenten und, in sinngemäßer Weise, auf Gleichungen mit gebrochenen positiven und negativen Exponenten.

§ 2.

Wir sagen von einer Gleichung (1), daß sie vom Typus $(\Theta_{n_1}, \Theta_{n_2}, \ldots, \Theta_0)$ sei. So ist beispielsweise $c_4 z^4 - c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = 0$, $c_r > 0$, vom Typus $(\Theta_4 = 0, \Theta_2 = \pi, \Theta_1 = 0, \Theta_0 = 0)$. *Das Absolutglied soll immer von Null verschieden sein, außer wenn das Gegenteil ausdrücklich erwähnt wird.* Daher sind alle Wurzeln unserer Gleichungen von Null verschieden. Unsere Aussagen werden sich auf alle Gleichungen beziehen, die zu demselben Typus gehören. — Wir nennen ein Intervall von φ (mit Ausschluß der Grenzwerte), sowie auch das Innere des entsprechenden Sektors in der Ebene der komplexen Zahlen, ein S_-, falls es für jedes φ des Intervalls eine durch den Nullpunkt gehende Gerade gibt, derart, daß alle Vektoren $\Theta_{n_1} + n_1\varphi$, $\Theta_{n_2} + n_2\varphi$, $\ldots$, Θ_0 auf einer Seite der Geraden liegen. *Dann kann S_- keinen Wurzelpunkt von $f(z)$ enthalten.* Die anderen Sektoren, für die es solche Geraden nicht gibt, seien mit S_+ bezeichnet. *Alle Wurzelpunkte von* (1) *liegen in den S_+ (mit Einschluß der begrenzenden Strahlen).* Des bequemeren Ausdruckes halber sagen wir, daß für alle φ eines S_- die Vektoren $\Theta_{n_1} + n_1\varphi$, $\Theta_{n_2} + n_2\varphi$, $\ldots$, Θ_0 eine „Gesamtöffnung" $< \pi$ haben, während für alle φ eines S_+ die Vektoren eine Gesamtöffnung $> \pi$ haben. Wir treffen alsbald besondere Vereinbarungen für den Übergangsfall einer Gesamtöffnung $= \pi$.

[1]) Bekanntlich wird dieses Prinzip in der Algebra und Funktionentheorie vielfach angewendet bei der Untersuchung der relativen Lage der Nullstellen einer Funktion $f(z)$ und der abgeleiteten Funktion $f'(z)$.

Die φ-Werte, die dem Anfang oder Ende eines S_- oder eines S_+ entsprechen, müssen unter denen enthalten sein, für welche zwei oder mehr der Vektoren gerade einen Winkel π miteinander bilden. Diese letzteren φ-Werte seien *kritische Werte* von φ genannt. Sie sind für einen gegebenen Typus in endlicher Anzahl vorhanden und sofort angebbar: sie sind offenbar diejenigen φ-Werte, für die wenigstens ein Paar von Werten Θ_j, Θ_k $(j, k = n_1, n_2, \ldots, 0)$ die Gleichung erfüllen

(2) $$(j-k)\varphi + \Theta_j - \Theta_k = (2\lambda + 1)\pi, \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Es ist aber im allgemeinen nicht wahr, daß umgekehrt jedem kritischen Wert von φ der Anfang oder das Ende eines Sektors S_+ oder S_- entspricht. Insbesondere ist ein kritischer φ-Wert, für den die Gesamtöffnung $> \pi$ ist, niemals der Anfang oder das Ende eines S_+ oder eines S_-. Eine einfache Überlegung erweist folgende Sachlage:

I. Wenn bei wachsendem φ beim Passieren eines kritischen Wertes die Gesamtöffnung von $> \pi$ zu $< \pi$ übergeht, so repräsentiert dieser φ-Wert den Anfang eines S_- und das Ende eines S_+. Solche Vektoren mögen durch V_{+-} bezeichnet werden.

Beispiel: $$z^3 - c_1 z + c_0 = 0, \quad c_0, c_1 > 0,$$

d. i. Typus $(\Theta_3 = 0, \ \Theta_1 = \pi, \ \Theta_0 = 0)$, $\quad \varphi = \frac{\pi}{3}$.

II. Wenn die Gesamtöffnung von $< \pi$ zu $> \pi$ übergeht, so repräsentiert der φ-Wert das Ende eines S_- und den Anfang eines S_+. Solche Vektoren mögen V_{-+} genannt werden.

Beispiel: Typus $(\Theta_3 = 0, \ \Theta_1 = 0, \ \Theta_0 = \pi)$, $\quad \varphi = \frac{\pi}{2}$.

III. Es kann geschehen, daß beim Passieren eines kritischen φ-Wertes die Gesamtöffnung sowohl vorher als nachher $> \pi$ ist. Solche Vektoren nennen wir V_{++}. Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

a) Für den kritischen φ-Wert selbst sei die Gesamtöffnung $> \pi$. Dieses kann nur eintreten für k-nomische Gleichungen, $k \geqq 4$. Der Vektor ergibt in diesem Falle keinerlei Auskunft über die Verteilung der Wurzeln.

Beispiel: Typus $(\Theta_4 = 0, \ \Theta_3 = 0, \ \Theta_2 = 0, \ \Theta_1 = 0, \ \Theta_0 = 0)$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

b) Für einen kritischen φ-Wert sei die Gesamtöffnung[2]) π, aber nicht alle Vektoren in einer Geraden. Solche Vektoren seien durch V'_{++} bezeichnet. Dann kann kein Nullpunkt von $f(z)$ auf einem V'_{++} liegen, so daß ein solcher Vektor als ein Sektor S_- angesehen werden kann, der sich auf den Vektor reduziert hat; folgerichtig muß man den Sektor S_+,

[2]) D. i., es sind mindestens zwei Vektoren vorhanden, die einen Winkel π miteinander bilden und von denen einer durch Rotation in den anderen übergeführt werden kann, ohne anderen Vektoren des Systems zu begegnen.

innerhalb dessen er liegt, als durch ihn in zwei Sektoren S_+ zerlegt ansehen. Auch dieser Fall tritt erst bei $k \geqq 4$ auf.

Beispiel: Typus ($\Theta_4 = 0$, $\Theta_2 = 0$, $\Theta_1 = 0$, $\Theta_0 = 0$), $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

c) Für einen kritischen φ-Wert liegen alle Vektoren in einer Geraden. In diesem Falle geben zwar die V_{++} (sie seien V''_{++} genannt) keine direkte Auskunft über die Separation der Wurzeln, jedoch erhalten wir Auskunft über Symmetrieverhältnisse der Wurzelverteilung in der Ebene der komplexen Zahlen (vgl. § 3).

Beispiel: Typus ($\Theta_3 = 0$, $\Theta_1 = \pi$, $\Theta_0 = 0$), $\varphi = 0$.

IV. Es bleibt als letzter Fall die Möglichkeit übrig, daß beim Passieren eines kritischen φ-Wertes die Gesamtöffnung sowohl vorher als nachher $< \pi$ ist. Ein solcher Vektor werde ein V_{--} genannt. Man sieht, daß, wenn dies eintritt, alle Vektoren für den kritischen Wert in dieselbe Gerade fallen müssen. Daher wird man das V_{--} passend als einen auf den Vektor reduzierten Sektor S_+ ansehen, welcher dann den Sektor S_-, innerhalb dessen er liegt, in zwei S_- teilt.

Beispiel: ($\Theta_3 = 0$, $\Theta_1 = \pi$, $\Theta_0 = 0$), $\varphi = \pi$.

§ 3.

Durch die beschriebenen Operationen wird die Ebene der komplexen Zahlen abwechselnd in Sektoren S_+ und S_- eingeteilt, wobei jedoch manche der S_+ und S_- sich auf einen Vektor reduzieren können. Wir bedenken ferner, daß, da zwei S_+ nur im Nullpunkt zusammenhängen, eine kontinuierliche Änderung der Wurzeln, entsprechend einer kontinuierlichen Änderung der absoluten Beträge der Koeffizienten zwischen beliebigen positiven Grenzen, bei festgehaltenen Argumenten der Koeffizienten, die Gesamtzahl der in jedem Sektor S_+ befindlichen Wurzeln ungeändert läßt, da die Auswanderung aus einem Sektor S_+ in einen anderen bedeuten würde, daß die Wurzel durch den Wert Null hindurchgehen müßte, was nach Voraussetzung ausgeschlossen wurde. *Wenn wir daher für einen gegebenen Typus für irgendeine Gleichung die Anzahl der in jedem Sektor S_+ gelegenen Wurzelpunkte kennen so hat jede Gleichung des Typus dieselbe Verteilung der Wurzelpunkte.*

Wir zeigen ferner, daß in jedem Sektor S_+ mindestens eine Wurzel der Gleichung liegen muß. Die verwendete Schlußweise gilt unverändert für aneinanderstoßende Sektoren S_+ (d. h. Sektoren S_+, die durch einen verschwindenden S_--Sektor voneinander getrennt sind) und für verschwindende S_+. Wir nehmen zunächst an, daß die Gleichung trinomisch sei und φ ein in einem S_+ liegender Wert des Argumentes; dann haben die den drei Termen entsprechenden Strahlen die Eigenschaft, daß, wenn man

auf einem von ihnen eine beliebige Länge vom Anfangspunkt aufträgt, dadurch auf den beiden anderen Strahlen Längen bestimmt werden, derart, daß die geometrische Summe der drei Vektoren verschwindet. Dieses besagt, daß, falls für trinomische Gleichungen ein Typus vorgegeben ist, und man in irgendeinem der zugehörigen S_+ einen Punkt beliebig wählt, es sicher eine trinomische Gleichung des gegebenen Typus gibt, für welche der Punkt ein Wurzelpunkt ist. Da aber, wie bemerkt, ein Auswandern eines Wurzelpunktes aus einem Sektor S_+ in einen andern bei Veränderung der Koeffizienten nicht stattfinden kann, solange der Typus unverändert bleibt, ist der Satz für trinomische Gleichungen bewiesen. (Vgl. auch § 5, b)). Für k-nomische Gleichungen, $k > 3$, wählen wir von den k-Strahlen (deren Gesamtöffnung $> \pi$ ist) drei aus, derart, daß die Gesamtöffnung dieser drei Strahlen ebenfalls $> \pi$ ist. Diese drei Strahlen entsprechen gewissen drei Termen der vorgelegten Gleichung. Wenn wir auf einem dieser Strahlen einen Punkt beliebig wählen, so können wir, falls wir auf den $k-3$ nicht ausgezeichneten Strahlen je einen Punkt in *hinreichender Nähe* des Anfangspunktes wählen, immer noch auf den zwei anderen ausgezeichneten Strahlen je einen Punkt wählen, so daß die geometrische Summe der k Punkte verschwindet. Dadurch ist bewiesen, daß es für jeden vorgegebenen Typus Gleichungen gibt, für die ein beliebiger in einem S_+ gelegener Punkt ein Wurzelpunkt ist, und wir schließen wie oben, daß jede k-nomische Gleichung von vorgegebenem Typus in jedem zugehörigen S_+-Sektor wenigstens einen Wurzelpunkt hat. Q. e. d.

Die beiden Fälle III c), V''_{++}, und IV, V_{--}, können nur vorkommen, wenn die Wurzelpunkte von $f(z)$ symmetrisch zu der Geraden φ in der komplexen z-Ebene liegen. Es wird nämlich, wenn φ_0 der Neigungswinkel des betr. V''_{++} oder V_{--} ist, die Gleichung durch die Substitution $z' = z \cdot e^{-i\varphi_0}$ in eine andere übergeführt, in der alle Koeffizienten denselben Wert des Argumentes haben. — Dasselbe findet auch statt für einen Winkel φ, für den alle Vektoren nicht nur in einer Geraden, sondern sogar in derselben Richtung liegen (Gesamtöffnung $= 0$). Umgekehrt muß einer dieser Fälle vorliegen, wenn es eine durch den Nullpunkt gehende Gerade gibt, in bezug auf welche die Wurzeln der Gleichung in der Zahlenebene symmetrisch verteilt sind.

Es verdient, bemerkt zu werden, daß man in Gleichungen mit reellen Koeffizienten zwischen zwei Arten von reellen Wurzeln unterscheiden kann. Eine Wurzel kann reell sein, weil ein Sektor S_+ in einen Vektor V_{--} für $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ degeneriert (§ 2, IV), während zu beiden Seiten ein Sektor S_- liegt. In diesem Fall muß die Wurzel reell bleiben, wie auch die (reell vorausgesetzten) Koeffizienten sich stetig ändern mögen, voraus-

gesetzt, daß sie nicht zu Null werden. Oder, eine Wurzel kann reell sein, weil ein Sektor S_+ sich über den Winkel 0 oder π hinüberstreckt. In diesem Falle können die in dem betreffenden S_+ enthaltenen Wurzelpunkte (oder einige von ihnen) zugleich auf der Achse der reellen Zahlen liegen, und es ist nun nicht möglich, ohne die absoluten Beträge der Koeffizienten heranzuziehen — z. B. durch Verwendung der Diskriminante —, eine definitive Aussage darüber zu machen, ob die betreffenden Wurzeln reell oder komplex sind (vgl. §§ 5, a); 6, a)).

Ein Apparat nach Art eines „Planetariums", welcher die Vektoren von willkürlich gewählten Anfangslagen und mit Winkelgeschwindigkeiten, die zueinander in den Verhältnissen $1:2:3:\ldots:n$ stehen, rotieren läßt, würde zur mechanischen Bestimmung der Sektoren S_+, S_- für vorgegebene Gleichungstypen geeignet sein. Die Herstellung eines solchen Apparates würde keine Schwierigkeiten bieten. Eine gewöhnliche Taschenuhr ist z. B. geeignet, die Sektoreneinteilung für alle Gleichungen einer der Formen $z^{12} \pm az^{\lambda} \pm b = 0$, $a > 0$, $b > 0$, $\lambda = 1,11$ durchzuführen.

Wir bemerken noch, daß über die Verteilung der Nullstellen von $df(z)/dz$ das Folgende gilt: *Falls für eine Gleichung von gegebenem Typus die S_+-Sektoren hergestellt werden, so liegen auch alle Wurzelpunkte von $f'(z)$ in diesen S_+, und zwar enthält jeder Sektor S_+ dieselbe Anzahl von Wurzelpunkten von $f(z)$ wie von $f'(z)$, mit Ausnahme eines S_+, das einen Wurzelpunkt weniger von $f'(z)$ enthält als von $f(z)$.*

Zum Beweis genügt es, unter Berücksichtigung des am Anfang dieses Paragraphen aufgestellten Satzes, darauf hinzuweisen, daß 1. $f'(z) = 0$ und $f'(z)\cdot z = 0$ mit Ausnahme der Wurzel $z = 0$ dieselben Wurzeln haben: 2. falls $f(z)$ vom Typus $(\Theta_{n_1}, \Theta_{n_2}, \ldots, \Theta_{n_k}, \Theta_0)$ ist, dann $z\cdot f'(z)$ vom Typus $(\Theta_{n_1}, \Theta_{n_2}, \ldots, \Theta_{n_k})$ ist; 3. jeder Sektor S_+ von $(\Theta_{n_1}, \Theta_{n_2}, \ldots, \Theta_{n_k})$ innerhalb, oder wenigstens nicht außerhalb, eines S_+ von $(\Theta_{n_1}, \Theta_{n_2}, \ldots, \Theta_{n_k}, \Theta_0)$ liegt.

II. Anwendung auf spezielle Gleichungstypen.

§ 4.

Binomische Gleichungen ($\Theta_n = 0$, $\Theta_0 =$ beliebig).

Die kritischen φ-Werte sind die n Werte $\varphi = (\Theta_0 + (2\lambda + 1)\pi)/n$, $\lambda = 0, 1, \ldots, n-1$. Den n Vektoren (vgl. § 2, IV) entsprechen n verschwindende Sektoren S_+.

§ 5.

Trinomische Gleichungen.

a) *Reelle Koeffizienten.* Wir übergehen den einfachen Fall quadratischer Gleichungen und betrachten nur reduzierte *kubische Gleichungen* $\Theta_3 = 0$, $\Theta_1 = 0$ oder π, $\Theta_0 = 0$ oder π):

Für Gleichungen mit reellen Koeffizienten, $z^3 + az + b = 0$ und mit Wurzeln $z_j = \varrho_j e^{i\varphi_j}$, $\varrho_j > 0$, $j = 1, 2, 3$, erhalten wir folgende vollständige Klassifikation[3]):

$a > 0,\ b > 0$:	$\varphi_1 = \pi$;	$\pi/3 < \varphi_2 < \pi/2$;	$3\pi/2 < \varphi_3 < 5\pi/3$. [4])
$a > 0,\ b < 0$:	$\varphi_1 = 0$;	$\pi/2 < \varphi_2 < 2\pi/3$;	$4\pi/3 < \varphi_3 < 3\pi/2$.
$a < 0,\ b > 0$:	$\varphi_1 = \pi$;	$0 \leqq \varphi_2 < \pi/3$;	$5\pi/3 < \varphi_3 \leqq 2\pi$.
$a < 0,\ b < 0$:	$\varphi_1 = 0$;	$2\pi/3 < \varphi_2 \leqq \pi$;	$\pi \leqq \varphi_3 < 4\pi/3$.

Für $a < 0$, $b > 0$ und $a < 0$, $b < 0$ haben wir einen in § 3 erwähnten Fall. Wenn z. B. für $a < 0$, $b > 0$ in $0 \leqq \varphi_2 < \pi/3$, $5\pi/3 < \varphi_3 \leqq 2\pi$ die Gleichheitszeichen gelten, haben wir drei reelle Wurzeln, zwei positive, eine negative. Falls das Gleichheitszeichen nicht gilt, haben wir zwei nicht-reelle Wurzeln mit Argumenten in den angegebenen Intervallen. Um zu entscheiden, welcher Fall vorliegt, muß die Diskriminante herangezogen werden.

b) *Komplexe Koeffizienten* (Θ_n = beliebig, Θ_m = beliebig, Θ_0 = beliebig). Für trinomische Gleichungen erhalten wir, wie die obigen Beispiele bereits vermuten lassen, im wesentlichen erschöpfende Auskunft über die Separation der Wurzeln. Wir stellen, ohne in jedem Fall auf die einfachen Beweise einzugehen, die Hauptresultate zusammen.

Die Bestimmung der kritischen φ-Werte durch Auflösung der Gleichungen (2), § 2, ergibt $2n$ Werte, die aber nicht notwendig alle verschieden sind. Wenn alle verschieden sind, erhalten wir n nicht-verschwindende Sektoren S_+, voneinander getrennt durch n nicht-verschwindende Sektoren S_-. Falls dieses stattfindet, sind die Wurzeln getrennt, denn wir haben in § 3 gezeigt, daß jede Gleichung des betreffenden Typus in jedem S_+ *mindestens einen Wurzelpunkt* hat, und, da wir n Sektoren haben, so hat die Gleichung *genau einen Wurzelpunkt* in jedem S_+.

Die Spezialfälle, in denen mehrere der kritischen φ-Werte zusammenfallen können, sind die folgenden:

Die Koeffizienten seien reell.

Für m, n teilerfremd: Von den $2n$ kritischen φ-Werten können dann *entweder* zwei Werte 0 zusammenfallen, *oder* zwei Werte π, *oder* aber zwei Werte 0 können zusammenfallen und auch zwei Werte π. Im ersten und im zweiten Fall kann der entsprechende, auf einen Vektor sich reduzierende Sektor entweder ein V_{--} oder ein V''_{++} sein; im dritten Fall erhalten wir je ein V_{--} und ein V''_{++}. Um ohne Ausnahme von genau

---

[3]) Hierbei würden $a = 0$ oder $b = 0$ Übergangsformen entsprechen, welche nicht ausdrücklich hervorgehoben sind.

[4]) D. i., eine reelle negative Wurzel, zwei nicht reelle Wurzeln, von denen je eine in jedem der beiden angegebenen 30°-Sektoren liegt.

n Sektoren S_+ reden zu können, müssen wir für trinomische Gleichungen nicht nur, wie in § 2, V_{--} als ein S_+ zählen, sondern wir müssen auch festsetzen, daß ein in einen Sektor S_+ fallendes V''_{++} den Sektor in zwei S_+ zerlegt.

Für m, n *nicht teilerfremd*, $(m, n) = k > 1$: Wir erhalten wieder genau n Sektoren S_+, indem wir vom Typus $(\Theta_{n/k}, \Theta_{m/k}, \Theta_0)$ ausgehen und dann alle Winkel im Verhältnis $k:1$ gegen Θ_0 hin kontrahieren, so daß durch diese Operationen der Sektor $(\Theta_0, 2\pi/k + \Theta_0)$ ausgefüllt wird, und schließlich die Ebene durch k aneinandergefügte solche Sektoren überdecken.

Die Koeffizienten seien komplex (*nicht alle reell*). Im allgemeinen Fall haben wir nun n nicht-verschwindende S_+ und n nicht-verschwindende S_-. *Wenn* $(m, n) = 1$, existiert höchstens eine, leicht auffindbare Symmetrieachse durch den Nullpunkt für die Wurzelpunkte, und diese spielt genau die Rolle des 0-Vektors und des π-Vektors in dem eben besprochenen Fall reeller Koeffizienten. *Wenn* $(m, n) = k > 1$, haben wir entweder (allgemeiner Fall) keinen verschwindenden Sektor (nämlich wenn die Gleichung $r_n e^{i\Theta_n} z^{n/k} + r_m e^{i\Theta_m} z^{m/k} + r_0 e^{i\Theta_0} = 0$, $r_n \cdot r_m \cdot r_0 > 0$, keine durch den Nullpunkt gehende Symmetrieachse für die Wurzelpunkte hat) oder wir erhalten eine Figur, die sich nur durch eine gewisse Rotation um den Nullpunkt von der entsprechenden Figur für reelle Koeffizienten unterscheidet. Wir machen daher wieder dieselben Annahmen wie oben behufs Zählung der S_+. Dann gilt:

Im Innern eines jeden Sektors S_+ liegt immer genau ein Wurzelpunkt jeder trinomischen Gleichung des betreffenden Typus. Dabei bedeutet das Innere eines etwa vorhandenen verschwindenden S_+ (d. i. eines V_{--}) die Punkte des Vektors selbst; und es gilt weiter die Beschränkung, daß für ein etwa vorhandenes V''_{++}, längs dessen zwei S_+ aneinanderstoßen, entweder je ein Wurzelpunkt im Innern jedes der beiden Sektoren S_+ liegt, oder aber, daß beide Wurzelpunkte auf der gemeinsamen Begrenzung liegen. Zwischen diesen beiden Möglichkeiten kann ohne Hinzunahme der absoluten Beträge der Koeffizienten nicht entschieden werden[5]).

---

[5]) Eine andere Separation der Wurzeln trinomischer Gleichungen verdankt man P. Nekrassoff, *Über trinomische Gleichungen*, Math. Ann. 29 (1887), S. 413—430. Soweit ein Vergleich mit der gegenwärtigen Arbeit in Betracht kommt, zeigt Nekrassoff, daß die Wurzeln genau separiert sind durch die Zerlegung der Ebene in n (Grad der Gleichung) vom Nullpunkt ausgehende Sektoren je von der Öffnung $2\pi/n$, wobei der Anfang eines Sektors von Θ_n, Θ_m, Θ_0 allein abhängt. Dem Nachteil, daß in dieser Einteilung die Sektoren S_+ bereits für sich allein die ganze Ebene überdecken, steht gegenüber, daß in Nekrassoffs Einteilung bei festgehaltenen Θ_n und Θ_0 anscheinend der Koeffizient des mittleren Gliedes beliebige komplexe Werte annehmen darf, ohne daß die Wurzelpunkte aus den Sektoren heraustreten. — Durch eine

c) Um auch ein Beispiel für komplexe Koeffizienten zu geben, betrachten wir den Typus ($\Theta_5 = 0$, $\Theta_2 = 2\pi/5$, $\Theta_0 = 5\pi/6$). Die kritischen φ-Werte sind gegeben durch $5\varphi - 5\pi/6 = \lambda_1\pi$, $\lambda_1 = 1, 3, 5, 7, 9$; resp. $5\varphi - (2\varphi + 2\pi/5) = \lambda_2\pi$, $\lambda_2 = 1, 3, 5$; $2\varphi + 2\pi/5 - 5\pi/6 = \lambda_3\pi$, $\lambda_3 = 1, 3$. Man findet: $\varphi = 66^0$, 84^0, 129^0, 138^0, 204^0, 210^0, 282^0, 309^0, 324^0, 354^0 und erhält die fünf Sektoren S_+: $66^0 < \varphi_1 < 84^0$, $129^0 < \varphi_2 < 138^0$, $204^0 < \varphi_3 < 210^0$, $282^0 < \varphi_4 < 309^0$, $324^0 < \varphi_5 < 354^0$. Jeder dieser Sektoren enthält genau einen Wurzelpunkt.

§ 6.

Quadrinomische Gleichungen und k-nomische Gleichungen, $k > 4$.

Wir betonten bereits, daß bei wachsendem k unser Verfahren rasch an Ergiebigkeit einbüßt. Jedoch erhält man für $k = 4$ gewöhnlich, und für $k > 4$ häufig, wertvolle Auskunft, die in den meisten Fällen durch Berücksichtigung der absoluten Beträge der Koeffizienten leicht wesentlich vervollständigt werden kann.

a) Indem wir den ohne Schwierigkeit vollständig zu behandelnden Fall der reduzierten biquadratischen Gleichung übergehen, behandeln wir nun als Beispiel einer quadrinomischen Gleichung höheren Grades den Typus ($\Theta_{10} = 0$, $\Theta_9 = 0$, $\Theta_5 = 0$, $\Theta_0 = 0$).

Der, verglichen mit der Anzahl der Terme hohe, Grad und die Verteilung der Exponenten lassen erwarten, daß man verhältnismäßig gute Auskunft über die Separation der Wurzeln dieser Gleichung erhalten wird. Die Sektoren S_+ sind $18^0 < \varphi_1 < 36^0$, $36^0 < \varphi_2 < 60^0$, $90^0 < \varphi_3 < 108^0$, $108^0 < \varphi_4 < 140^0$, $162^0 < \varphi_5 \leqq 180^0$, $180^0 \leqq \varphi_6 < 198^0$, $220^0 < \varphi_7 < 252^0$, $252^0 < \varphi_8 < 270^0$, $300^0 < \varphi_9 < 324^0$, $324^0 < \varphi_{10} < 342^0$. Die kritischen Werte $\varphi = 36^0$, 108^0, 252^0, 324^0 ergeben je ein V'_{++}, so daß kein Wurzelpunkt auf einem dieser Vektoren liegen kann, und kein Wurzelpunkt bei veränderlichen, positiven Koeffizienten aus einem Sektor S_+ über diese Vektoren hinüber in ein benachbartes S_+ wandern kann[6]). Dagegen ist es möglich, daß auf dem Vektor $\varphi = \pi$ zwei reelle negative Wurzelpunkte liegen, da $\varphi = \pi$ ein V''_{++} ergibt. Da es tatsächlich Glei-

---

leichte Übertragung können wir aus Nekrassoffs Satz III für unsere S_+ das Folgende herauslesen: Falls $z^n + az^m + b = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $(m, n) = 1$, die vorgelegte Gleichung ist, so haben wir zwei zusammenstoßende S_+ dann und nur dann, wenn a^n/b^{n-m} reell ist. Je nachdem dann $m^m(m-n)^{n-m}(-a)^n < n^n(-b)^{n-m}$ oder $\geq n^n(-b)^{n-m}$ ist, liegt je ein Wurzelpunkt im Innern jedes der beiden Sektoren S_+, oder es liegen zwei Wurzelpunkte auf der gemeinsamen Begrenzung, und keine im Innern der beiden Sektoren. Der Fall $(m, n) > 1$ wird unmittelbar auf diesen zurückgeführt. — Wir führen diesen Satz an, obgleich er von den absoluten Beträgen der Koeffizienten Gebrauch macht.

[6]) Vgl. § 3

chungen des gegebenen Typus gibt, welche einen Wurzelpunkt in dem Sektor $18^0 < \varphi_1 < 36^0$ haben (z. B. $z^{10} + \varepsilon_1 z^9 + \varepsilon_2 z^5 + 1 = 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, ε_1, ε_2 hinreichend klein), und da es in ähnlicher Weise Gleichungen unseres Typus gibt, die einen Wurzelpunkt in irgendeinem anderen der Sektoren S_+ haben, können wir sagen, da wir gerade $n = 10$ Sektoren S_+ haben: *In jedem Sektor S_+ liegt genau ein Wurzelpunkt jeder Gleichung* ($\Theta_{10} = 0$, $\Theta_9 = 0$, $\Theta_5 = 0$, $\Theta_0 = 0$), *außer daß die beiden Wurzelpunkte in den beiden Sektoren* $162^0 < \varphi \leqq 180^0$, $180^0 \leqq \varphi < 198^0$ *beide in den Vektor $\varphi = \pi$ hineinrücken können.* Eine Angabe, wann dieses geschieht, ist ohne Berücksichtigung der absoluten Beträge der Koeffizienten nicht möglich.

b) Falls nicht nur die Argumente der Koeffizienten gegeben sind, sondern die Koeffizienten selbst, kann man oft durch einfache Kunstgriffe viel genauere Auskunft erhalten, als die direkte Anwendung unserer Methode auf den betreffenden Gleichungstypus ergibt. Wir erläutern dieses durch ein Beispiel.

$f(z) = z^4 + 3z^3 + 2z^2 + 5z + 4 = 0$. Zunächst erhalten wir nur ($\Theta_4 = 0$, $\Theta_3 = 0$, $\Theta_2 = 0$, $\Theta_1 = 0$, $\Theta_0 = 0$) hat keine Wurzelpunkte in dem Sektor S_-, $315^0 < \varphi < 405^0 (= 45^0)$. — Wir verwenden nun auf folgende Weise die Tatsache, daß die Koeffizienten bekannt sind. Wir bilden $f_1(z) = (z - \alpha) f(z) = z^5 + (3 - \alpha) z^4 + (2 - 3\alpha) z^3 + (5 - 2\alpha) z^2 + (4 - 5\alpha) z - 4\alpha = 0$, wählen für α der Reihe nach Werte, die den Koeffizienten von z^4, von z^3, von z^2, von z zum Verschwinden bringen, und wenden jedesmal auf die so erhaltene Gleichung unser Verfahren an.

$\alpha = 3$: $f_1(z) = z^5 - 7z^3 - z^2 - 11z - 12 = 0$; wir finden, daß diese Gleichung keine Wurzelpunkte hat in den Sektoren S_-, $0^0 < \varphi < 60^0$, $300^0 < \varphi < 360^0$, so daß unser oben erhaltener Sektor, in dem kein Wurzelpunkt von $f(z) = 0$ liegen kann, nach jeder Seite um 15^0 vergrößert worden ist.

$\alpha = 2/3$: $f_1(z) = z^5 + 7/3\, z^4 + 11/3\, z^2 + 2/3\, z - 8/3 = 0$; diese Gleichung hat keine Wurzelpunkte in den Sektoren $0^0 < \varphi < 45^0$, $90^0 < \varphi < 135^0$, $225^0 < \varphi < 270^0$, $315^0 < \varphi < 360^0$.

$\alpha = 5/2$: $f_1(z) = z^5 + 1/2\, z^4 - 11/2\, z^3 - 17/2\, z - 10 = 0$; es sind keine Wurzelpunkte in den Sektoren $0^0 < \varphi < 60^0$, $120^0 < \varphi < 144^0$, $216^0 < \varphi < 240^0$, $300^0 < \varphi < 360^0$.

$\alpha = 4/5$: $f_1(z) = z^5 + 11/5\, z^4 - 2/5\, z^3 + 17/5\, z^2 - 16/5 = 0$ hat keine Wurzelpunkte in den Sektoren $90^0 < \varphi < 144^0$, $216^0 < \varphi < 270^0$.

Vereinigt erhalten wir: die gegebene Gleichung hat alle Wurzelpunkte in den Sektoren S_+, $60^0 < \varphi < 90^0$, $144^0 \leqq \varphi \leqq 180^0$, $180^0 \leqq \varphi < 216^0$, $270^0 < \varphi < 300^0$. In jedem dieser Sektoren liegt je ein Wurzelpunkt,

wobei jedoch zweifelhaft bleibt, ob zwei negative reelle Wurzeln auftreten, oder anstatt ihrer zwei nicht-reelle Wurzeln mit negativem reellem Teil. Tatsächlich hat die Gleichung zwei negative Wurzeln, eine im Intervall $(-3, -2)$, eine im Intervall $(-1, 0)$.

In ähnlicher Weise kann man die gegebene Gleichung mit einem Faktor $z^2 + \alpha z + \beta$ multiplizieren, und über die zwei Größen α, β derart verfügen, daß in $(z^2 + \alpha z + \beta) \cdot f(z)$ *zwei* Koeffizienten verschwinden, usw. Auf die oben behandelte Gleichung angewendet, würde dies uns gestatten, die Intervalle $(144^0, 180^0)$ resp. $(180^0, 216^0)$ auf $(150^0, 180^0)$ resp. $(180^0, 210^0)$ zu verkleinern.

Auch Transformationen $z = z' - \gamma$, in denen γ so gewählt wird, daß in $\varphi(z') = f(z' - \gamma) = 0$ einer der Koeffizienten von z' verschwindet, können mit gutem Erfolg verwendet werden, jedoch werden die erhaltenen Gebiete nun von komplizierterer Art sein, da die Sektoren S_+ für die verschiedenen Werte von γ von verschiedenen Punkten ausgehen.

(Eingegangen am 12. 10. 1921.)

Bemerkung zur Axiomatik der Größen und Mengen.

Von

A. Schoenflies in Frankfurt a. M.

In dem Artikel „Zur Axiomatik der Mengenlehre“[1]) habe ich die Axiome, die sich mit den Gebieten der Äquivalenz, der Mengenteilung und Mengenvergleichung beschäftigen, einer Erörterung unterzogen. An zwei Resultate dieses Artikels knüpfe ich hier an. Erstens einmal, da die in ihm durchgeführten Untersuchungen auf die Elemente der Mengen gar nicht eingehen, so stellen sie, allgemein gesprochen, axiomatische Betrachtungen über Größen und Größenbeziehungen dar, an denen die Mengen ja Teil haben; und zweitens hatte eine der dort analysierten Beziehungen den Gedanken nahegelegt, auch Größen entgegengesetzter Art (resp. Mengen von zweierlei Art von Elementen) in Betracht zu ziehen, und auf sie die oben genannten Operationen auszudehnen. Hierzu gebe ich im folgenden einige Ergänzungen.

Bereits a. a. O. war bemerkt worden, daß es naturgemäß der Untersuchung bedarf, ob für die so charakterisierten Mengen die weiteren allgemeinen Sätze der Cantorschen Theorie in Kraft bleiben. Inzwischen hat mir Herr A. Fränkel mitgeteilt, daß für das von mir konstruierte Beispiel schon ein Teil der in meinem Artikel zugrunde gelegten Axiome versagt; und zwar ein Teil der Axiome über Teilmengen. Über Teilmengen habe ich zwei Axiome an die Spitze gestellt. Wird die Beziehung, daß M' Teilmenge von M ist, durch

$$M' t M$$

bezeichnet, so lauten diese Axiome:

I. Aus $M' t M$ und $M'' t M'$ folgt $M'' t M$ (der assoziative Charakter des Teilmengenbegriffs).

II. Jede Teilmenge M' von M bestimmt eindeutig eine zweite Teilmenge M_1 von M, die ihre Komplementärmenge bezüglich M heißt.

---

[1]) Amsterdam Ac. Proc. **22** (1920); abgedruckt in den Math. Ann. **83** (1921), S. 173.

Von diesen grundlegenden Axiomen versagt für das a. a. O. behandelte Beispiel das zweite; das erste bleibt bestehen. Das Beispiel war so erdacht, daß man als Größen einseitig begrenzte Geraden von unendlicher Länge, aber von zwei entgegengesetzten Richtungen wählte, als Teilmenge jeden ebenfalls unendlichen Bestandteil zuläßt und die Äquivalenz z. B. durch eindeutige Ähnlichkeitsabbildung definiert. In der Tat bleibt dann das erste Axiom erhalten, das zweite aber nicht. Wenn man nämlich von einer solchen Geraden eine Teilmenge M' im obigen Sinne abspaltet, so bleibt außerdem noch ein endlicher Abschnitt übrig, und der entspricht unserm Begriff der Teilmenge nicht mehr. Das nämliche gilt für das zweite a. a. O. behandelte Beispiel.

Diese von Herrn Fränkel bemerkte Tatsache ist auch deshalb von Interesse, weil sie den Teilmengenbegriff und seine Eigenart in neuer Weise beleuchtet. Sie zeigt nämlich in erster Linie die Unabhängigkeit der Axiome I und II, sie zeigt außerdem, daß der Teilmengenbegriff gewisse mathematische Operationen auch dann noch zuläßt, wenn das Komplementärmengenaxiom nicht erfüllt ist.

Ich erinnere weiter daran, daß das vorstehende Beispiel zu folgendem Zwecke erdacht war. Ich hatte a. a. O. das Axiom aufgestellt,

(D) aus MdN und NdP folge MdP;[2])

und es sollte durch das Beispiel belegt werden, daß man Größen oder Mengen einführen könne, die den Äquivalenzaxiomen usw. folgen, für die aber das eben genannte Axiom nicht erfüllt ist. Diesen Zweck kann man durch eine einfache Abänderung des Beispiels erreichen. Es genügt dazu, auch den endlichen Bestandteil M_1, der durch Abtrennung der Teilmenge M' von M übrigbleibt, als Teilmenge von M zuzulassen und die Äquivalenz wieder auf eine Ähnlichkeitstransformation und die Übereinstimmung der Richtung zu gründen.

Um die Größenklasse, die sich so ergibt, noch genauer zu umschreiben, wollen wir festsetzen, daß

1. alle betrachteten Strecken auf Geraden liegen, die parallel einer x-Achse verlaufen;

2. die Endpunkte der Strecken rationale Abszissen haben sollen[3]);

3. nur alle diejenigen parallelen Geraden als Träger von Strecken in Betracht kommen, die eine y-Achse in rationalen Punkten schneiden, so daß, beiläufig bemerkt, unsere Größenklasse abzählbar ist. Auf die Gesamtheit der so eingeführten Strecken wollen wir nun die Teilmengenaxiome übertragen. Zunächst ist klar, daß hier die Axiome I und II beide erfüllt sind. Das gleiche

---

[2]) MdN bedeutet: Es gibt weder eine Teilmenge von M, die äquivalent N ist, noch eine Teilmenge von N, die äquivalent M ist.

[3]) Man hat die Äquivalenz alsdann auf ähnliche Abbildung mit rationalen Koeffizienten zu gründen.

gilt aber auch noch von den folgenden a. a. O. über Teilmengen aufgestellten Axiomen:

III. Die Komplementärmenge von M_1 ist wiederum M'.

IV. Die beiden Komplementärmengen M' und M_1 einer Menge M sind fremde Mengen (d. h. ohne gemeinsame Teilmenge).

Bestehen bleibt außerdem auch das Axiom I von § 3, nämlich

V. Ist $M' t M$ und $M \sim N$, so folgt daraus notwendig die Existenz einer Menge N', für die zugleich gilt

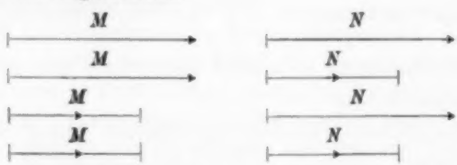
$$N' t N \quad \text{und} \quad M' \sim N',$$

und dies ist dasjenige Axiom, das für die gesamten Beweisführungen an vorderster Stelle steht.

Nicht bestehen dagegen bleibt das Axiom V von § 2, daß nämlich zwei fremde Mengen P und Q stets eine und nur eine Menge M bestimmen, deren Komplementärmengen sie sind. (Es versagt z. B., wenn die beiden Mengen P und Q auf verschiedenen Geraden liegen.) Es ist auch klar, daß diesem Axiom, das in der Mengenlehre die Erzeugung einer neuen Menge aus zwei gegebenen fordert, also ein *Existenz*axiom ist, eine wesentlich andere Stellung zukommt wie den vorstehenden[4]).

Für die Beziehungen zweier Strecken der so umschriebenen Größenklassen liegen folgende Möglichkeiten vor: Man kann zwei unendliche Strecken, zwei endliche, sowie eine endliche und eine unendliche, miteinander vergleichen. Wir fassen zuerst den Fall ins Auge, daß beide Strecken gleichgerichtet sind. Man hat dann die vier Möglichkeiten

1.
2.
3.
4.



und hat im ersten und vierten Fall offenbar die Beziehung

$$M a N,$$

im zweiten und dritten dagegen

$$M b N \quad \text{oder} \quad M c N.$$

Für Strecken einer und derselben Richtung ist also der Fall $M d N$ überhaupt ausgeschlossen, genau wie für die Klasse der unendlichen Mengen.

---

[4]) Von meinem hiesigen Kollegen Hellinger wurde ich darauf aufmerksam gemacht, daß man gewisse Mengen von Strecken als Objekte so einführen kann, daß für sie das obige Existenzaxiom ebenfalls in Kraft bleibt.

Geht man zu zwei Strecken M und N entgegengesetzter Richtung über, so ist klar, daß für sie offenbar in *jedem* Fall die Beziehung

$$MdN$$

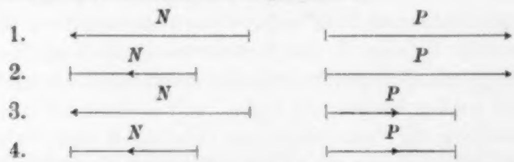
erfüllt ist, da ja die Äquivalenz auch die Übereinstimmung der Richtungen einschließen soll.

Wir prüfen nunmehr, welche Folgerungen sich aus

$$MdN \quad \text{und} \quad NdP$$

in den einzelnen Fällen ergeben. Gemäß dem Vorstehenden kann die Beziehung MdN auf folgende vier Arten realisiert sein

und analog haben wir für NdP die Möglichkeiten



Wir können dann zunächst kombinieren 1 mit 1, 2 mit 2, 3 mit 3 und 4 mit 4, und erhalten in allen Fällen die Beziehung

$$MaP\,;$$

ebenso können wir kombinieren 1 mit 3, 2 mit 4, 3 mit 1, 4 mit 2, und finden hierfür die Beziehungen

$$MbP \quad \text{und} \quad McP\,,$$

nämlich MbP für (13) und (24) und McP für (31) und (42). In keinem Falle aber erhalten wir

$$MdP\,,$$

oder kürzer ausgedrückt:

Aus (dd) folgt a oder b oder c, aber niemals d.

Damit ist der obengenannte Zweck erreicht. Unser Beispiel genügt den sämtlichen oben über Teilmengen aufgestellten Axiomen und zeigt durch seine Eigenart wiederum den axiomatischen Charakter der a. a. O. aufgestellten und oben wiederholten Forderung D [5]).

[5]) Die Frage, welche anderen Folgerungen aus den in § 2 (a. a. O.) betrachteten Verknüpfungen sich ziehen lassen, mag hier außer Betracht bleiben.

Unser Resultat ist noch aus einem andern Grunde bemerkenswert. Es nimmt einer von mir a. a. O. benutzten Schlußwendung die Beweiskraft. Ich habe nämlich dort (S. 181) behauptet, daß aus den Prämissen

$$MdN \quad \text{und} \quad NdP$$

weder MbP noch McP folgen könne, und zwar auf Grund folgender Erwägung. Die Beziehungen MdN und NdP können auch in die Form

$$NdM \quad \text{und} \quad PdN$$

geschrieben werden. Würde nun aus MdN und NdP der Schluß MbP möglich sein, so müßte wegen der vorstehenden umgekehrten Schreibweise auch der Schluß PbM möglich sein; aber MbP und PbM widersprechen einander.

Dieser eben wieder benutzte, aber offenbar unzulässige Schluß galt mir damals als evident. Worin liegt die Erklärung? In dem Tatbestand, auf den ich a. a. O. gerade mit allem Nachdruck hingewiesen habe, daß man nämlich aus rein negativen Behauptungen ohne weiteres überhaupt keinen Schluß ziehen dürfe — was aber eben doch wieder geschehen ist. Die obige Umkehr der Schlußweise hat nämlich nur eine formale, also inhaltlose Bedeutung. Die Beziehungen MdN und NdP sagen zwar in rein negativer Hinsicht dasselbe aus: aber die Objekte M und N brauchen in die negative Beziehung MdN keineswegs inhaltlich gleichwertig oder symmetrisch einzugehen. Wenn sie also benutzt werden können oder sollen, um aus ihnen und einer gleichfalls negativen Beziehung NdP eine Beziehung zwischen M und P abzuleiten, so kann sehr wohl die Sonderart der Objekte M und N sowie N und P für die resultierende Beziehung bestimmend in Frage kommen. Oder anders ausgedrückt: Ein rein negatives Verhältnis zwischen zwei Objekten M und N kann durch die Eigenart von M und N sehr mannigfach begründet sein, und gerade deshalb versagt bei der Kombination zweier solcher Beziehungen die Möglichkeit logischer Folgen, und macht also, *falls eindeutige Folgen gezogen werden sollen,* deren axiomatische Aufstellung nötig.

(Eingegangen am 15. 8. 1921.)

Über die Bezeichnung „Grad einer Differentialgleichung“ und Bemerkungen zu der Randwertaufgabe einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Von

J. Sommer in Danzig-Langfuhr.

Die Liesche Auffassung des Integrationsproblems der Differentialgleichungen erweist sich als eine natürliche Grundlage, sobald man auf die numerische und graphische Integration das Hauptgewicht legt, wie es für technische und physikalische Anwendungen geboten ist.

So stellt z. B. eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

wenn man imaginäre Zahlen zunächst von der Betrachtung ausschließt, eine Beziehung dar zwischen den Koordinaten eines „Krümmungselementes“, nämlich zwischen den Punktkoordinaten x, y, dem Richtungskoeffizienten der Tangente y' und y'', welche zusammen den Krümmungskreis einer Integralkurve durch (x, y) bestimmen. Die Zusammenfassung der stetig aufeinander folgenden Krümmungselemente zu Kurven (Elementvereinen) gibt die reelle Lösung der Differentialgleichung, oder die Stammgleichung $f(x, y, c_1, c_2) = 0$. Jede eigentliche Differentialgleichung zweiter (n-ter) Ordnung hat zur Lösung eine ∞^2-Kurvenschar — bzw. ∞^n — und man gelangt im allgemeinen zu einer bestimmten Kurve der Schar, wenn man von einem Krümmungselement ausgeht, welches durch x, y, y' und einem aus $F(x, y, y', y'') = 0$ sich ergebenden y'' definiert ist. Die Anzahl der hiernach noch möglichen Werte y'' (die imaginären Werte mitgerechnet) bezeichnet man zuweilen als den „Grad“ der Differentialgleichung [1].

---

[1]) Ohne daß es nötig wäre auf eine scharfe Begriffsbestimmung einzugehen, möge zum Beleg eine Stelle angeführt werden aus dem „Lehrbuch der Differentialgleichungen von A. R. Forsyth“, welches meist noch den älteren Standpunkt der Theorie vertritt. Nachdem der Verfasser zunächst eine Beschränkung auf algebraische Gleichungen für die Differentialquotienten ausgesprochen hat, sagt er:

Indem man umgekehrt von der Integralkurvenschar ausgeht, hat man im Fall eines endlichen Grades verschiedene Möglichkeiten, um eine Kurve, bzw. die zugehörigen Werte der Integrationskonstanten zu bestimmen. Durch zwei gewöhnliche, für die Kurvenschar und für die Differentialgleichung nicht singuläre Punkte, gehen nur noch endlich viele Kurven, ebenso wie durch einen Punkt mit vorgeschriebener Tangente. Wäre die letztere Bestimmung nur ein Spezialfall der ersten und die Anzahl der Kurven durch zwei getrennte Punkte identisch mit der Anzahl der Kurven durch einen gegebenen Punkt mit vorgeschriebener Tangente, also gleich dem Grad der Differentialgleichung, so hätte diese Bezeichnung eine tiefere Bedeutung für die Art, in welcher die Integrationskonstanten in das Integral eingehen, während sonst die Bezeichnung nur etwas Zufälliges trifft.

Es ist wohl nicht ohne Interesse, an einigen typischen Beispielen den Zusammenhang zu verfolgen zwischen den beiden angedeuteten Bestimmungen einer Kurve aus einer ∞^2-Schar, zumal damit ein Ansatz zu gewinnen ist für die Lösung der sogenannten Randwertaufgabe[2]): Diejenige Lösung der Differentialgleichung $F(x, y, y', y'') = 0$ zu bestimmen, welche durch zwei gegebene Punkte hindurchgeht. — Die Anzahl dieser Lösungen, auch für zwei beliebig nahe gelegene Punkte, ist i. A. größer, unter Umständen auch kleiner als der Grad der Gleichung, und nicht gleich dem Grad, wenn man den Bereich für y, y' nicht beschränkt.

Als erstes Beispiel möge die Gleichung betrachtet werden:

$$f(x, y, c_1, c_2) \equiv (x - c_1)(y - c_2) - 1 = 0, \tag{1}$$

mit den Parametern c_1 und c_2, also eine ∞^2-Schar von kongruenten rechtwinkligen Hyperbeln, welche die ganze x-y-Ebene doppelt überdecken. Durch zwei verschiedene Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gehen dann noch zwei Hyperbeln mit den Parametern:

$$\left.\begin{matrix} c_1 \\ c_1' \end{matrix}\right\} = \frac{x_1 + x_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 - \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}}, \quad \left.\begin{matrix} c_2 \\ c_2' \end{matrix}\right\} = \frac{y_1 + y_2}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}, \tag{2}$$

wobei der Fall zweier Punkte, die auf einer Parallelen zur y- oder x-Achse liegen, einer hier entbehrlichen leichten Sonderbetrachtung bedarf. Die Glei-

„Der *Grad* einer Differentialgleichung ist dann der Exponent der Potenz, zu welcher der höchste Differentialquotient erhoben ist, sobald die Gleichung auf rationale Form gebracht und frei von Brüchen ist."

Man vergleiche hierüber die zweite Auflage der Übersetzung von Walther Jacobsthal, Braunschweig 1912, S. 9 und den erläuternden und präzisierenden Zusatz von Jacobsthal S. 543. Freilich war der Gebrauch der Bezeichnung überhaupt nie einheitlich. Zuweilen ist als Grad die höchste Gesamtdimension in $y, y', \ldots y^{(n)}$ genommen worden.

[2]) S. die Einleitung des Artikels II A. 7a: Randwertaufgaben bei gew. D. von M. Bôcher, Enzykl. der Math. Wissensch. Bd. II. 1, S. 437.

chungen (2) ergeben zwei reelle Parameterwerte, wenn $(y_1-y_2)(x_1-x_2)>4$ oder <0 ist, zwei imaginäre Werte, wenn $0<(y_1-y_2)(x_1-x_2)<4$ und endlich nur einen Wert (eine Kurve), wenn $(y_1-y_2)(x_1-x_2)=4$ oder $=0$ ist.

Auch in dem Fall, wo durch 2 Punkte i. A. zwei Kurven der Schar hindurchgehen, kann es Punktepaare geben, durch welche nur eine Kurve geht. Zu jedem Punkt P_1 existieren unendlich viele derartige Punkte P_2, welche der Gleichung genügen:

$$(3) \qquad (x_1-x_2)(y_1-y_2)=4.$$

In dem Beispiel sind zwei solche ausgezeichnete Punkte die Endpunkte eines Hyperbeldurchmessers und die Tangenten an die Hyperbel (1) sind parallel. Die Hyperbeln (3) selbst, bei festem x_1, y_1 und veränderlichen $x_2 . y_2$, sind natürlich keine Lösungen der Differentialgleichung der Hyperbelschar.

Noch weiter gilt natürlich die Bemerkung, daß wenn i. A. durch zwei Punkte noch m Kurven der Schar gehen, es Punktepaare geben kann, durch welche weniger als m Kurven hindurchgehen.

Durch Beschränkung des Bereichs für P_2, bezogen auf P_1, könnte das Auftreten von ausgezeichneten Punktepaaren ausgeschlossen werden.

Man kann sich leicht ein Bild machen von den Hyperbeln durch zwei gegebene Punkte und dasselbe verfolgen, wenn der zweite Punkt mit dem ersten auf einer der Hyperbeln zusammenrückt. Läßt man $x_2 \to x_1$ und $y_2 \to y_1$ zusammenfallen, so daß $\lim \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \operatorname{tg} \nu$ einen endlichen Wert darstellt, so ergeben sich aus (2) die Werte

$$(2\text{a}) \qquad \left.\begin{matrix} c_1 \\ c_1' \end{matrix}\right\} = x_1 \pm \sqrt{-\operatorname{cotg} \nu}, \qquad \left.\begin{matrix} c_2 \\ c_2' \end{matrix}\right\} = y_1 \mp \sqrt{-\operatorname{tg} \nu},$$

und das sind dieselben Werte, die man aus den Gleichungen:

$$(4) \qquad f(x_1, y_1, c_1, c_2) = 0, \qquad \frac{d}{dx_1} f(x_1, y_1, c_1, c_2) = 0,$$

d. h. aus

$$(x_1-c_1)(y_1-c_2)-1=0,$$
$$y_1-c_2+(x_1-c_1)y_1'=0$$

erhält. Dem entspricht es vollkommen, daß bei der Elimination von c_1, c_2 aus

$$f(x, y, c_1, c_2)=0, \qquad \frac{df(x, y, c_1, c_2)}{dx}=0, \qquad \frac{d^2 f(x, y, c_1, c_2)}{dx^2}=0$$

sich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung und zweiten Grades:

$$5) \qquad y''^2 + 4y'^3 = 0$$

ergibt. Von den beiden Hyperbeln, welche im Punkt P_1 die gleiche Tangente haben, ist also die eine konvex, die andere konkav gegen die x-Achse. *Der*

Grad der Differentialgleichung ist ebenso groß wie die Zahl der Lösungen durch zwei Punkte und die Auflösung der Gleichung nach y'' ergibt die Einzellösungen. Liegen die beiden Punkte hinreichend nahe zu einander, so gehen die Tangenten an die zwei Kurven in P_1 bzw. P_2 durch kleine Drehungen aus der Sehne $P_1 P_2$ hervor. Ist die Lösung der Differentialgleichung durch zwei gegebene Punkte durch eine Reihenentwicklung zu bestimmen und denkt man sich $y-y_1$ nach Potenzen von $x-x_1$ entwickelt, so kann diese Entwicklung für $x=x_2$ noch gültig sein, oder auch nicht, so daß man im letzten Fall nur durch analytische Fortsetzung zu dem Wert y_2 für $x=x_2$ gelangt. Dies trifft zu, wenn beide Punkte P_1, P_2 auf einem Zweig einer Hyperbel liegen, aber $|x_2-x_1| > |x_1-c_1|$ ist. Dann könnte man allerdings die Entwicklung an der Stelle (x_2, y_2) nehmen, welche für $x=x_1$ noch gilt. Bei einem größeren Bereich für P_2, in bezug auf P_1, kann es jedoch vorkommen, daß die beiden Punkte auf verschiedenen Zweigen der durch sie hindurchgehenden Hyperbel liegen, dann kann man von einem Wert y_1 zu dem andern nur auf dem Wege der analytischen Fortsetzung gelangen.

Ganz ähnlich wie in dem behandelten Beispiel liegen die Verhältnisse bei der ∞^2-Kreisschar:

$$(x-c_1)^2+y^2-2c_2y=0,$$

als deren Differentialgleichung sich ergibt:

$$y^2y''^2+2y(1+y'^2)y''-y'^2(1+y'^2)^2=0,$$

und in vielen andern Fällen.

Dagegen lehrt ein ganz anderes ein zweites Beispiel: die Kurvenschar, welche durch die Gleichung gegeben ist:

$$f(x, y, c_1, c_2)\equiv(c_1x+c_2)^2-c_1y-1=0. \tag{6}$$

Diese Gleichung stellt für reelle c_1 und c_2 Parabeln vor, welche in der positiven oder negativen Richtung der y-Achse ins Unendliche gehen, je nachdem $c_1>0$ oder $c_1<0$ ist.

Durch zwei getrennte Punkte $P_1=(x_1, y_1)$ und $P_2=(x_2, y_2)$ gehen zwei Parabeln mit den Parametern:

$$\left.\begin{matrix} c_1 \\ c_1' \end{matrix}\right\}=\frac{y_1+y_2\pm2\sqrt{y_1y_2+(x_1-x_2)^2}}{(x_1-x_2)^2}, \quad \left.\begin{matrix} c_2 \\ c_2' \end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\,\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}-\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\left\{\begin{matrix} c_1 \\ c_1' \end{matrix}\right. . \tag{7}$$

Diese Werte sind reell, wenn $y_1y_2+(x_1-x_2)^2\geq0$ ist und jedenfalls immer dann, wenn y_1 und y_2 gleiches Vorzeichen besitzen. Beschränkt man sich der Einfachheit halber auf den Fall y_1 und $y_2>0$, so gibt es durch zwei derart beschränkte Punkte stets zwei Parabeln, von denen wenigstens eine in der $+y$-Richtung ins Unendliche geht, während ihr Scheitel unterhalb der

x-Achse liegt, denn jede der Parabeln schneidet die x-Achse in zwei reellen Punkten: $x = -\frac{c_2}{c_1} \pm \frac{1}{c_1}$.

Läßt man nun P_2 mit P_1 zusammenrücken, so daß $\lim\limits_{P_2=P_1} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \operatorname{tg} \nu$ einen endlichen Wert darstellt, so ist auch $\lim\limits_{P_2=P_1} \frac{\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}}{x_1 - x_2} = \frac{\operatorname{tg} \nu}{2\sqrt{y_1}}$ endlich und bestimmt und aus Gleichung (7) folgt dann:

$$c_1' = \frac{\operatorname{tg}^2 \nu}{4 y_1}, \quad c_2' = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \nu - x_1 \frac{\operatorname{tg}^2 \nu}{4 y_1}, \tag{8}$$

d. s. endliche bestimmte Werte, während c_1 und c_2 unendlich werden, und $\frac{c_2}{c_1} = -x_1$.

Nun könnte der Gleichung (6) für unendliche Werte von c_1 und c_2 nur Genüge geleistet werden, indem man

$$\left(x + \frac{c_2}{c_1}\right)^2 = (x - x_1)^2 = 0$$

setzt und diese Doppelgeraden müssen den Kurven der Schar zugerechnet werden, deshalb kann man sagen, daß *von den zwei Parabeln, welche durch zwei gegebene Punkte hindurchgehen, eine in eine Doppelgerade ausartet, wenn die zwei Punkte zusammenrücken.* Durch einen Punkt und eine durch ihn gehende Tangente, welche nicht zur Ordinatenachse parallel läuft, ist also nur eine Parabel bestimmt, während die Doppelgerade zwar zwei Schnittpunkte mit der Tangente gemeinsam hat aber eine andere Richtung besitzt.

Für $c_1 = 0$ würde die Gleichung (6) jeden Sinn verlieren, daher ist $c_1 \neq 0$ vorauszusetzen.

Bildet man nun die Differentialgleichung der Kurvenschar (6), indem man c_1, c_2 aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} (c_1 x + c_2)^2 - c_1 y - 1 &= 0 \\ 2(c_1 x + c_2) - y' &= 0 \\ 2 c_1 - y'' &= 0 \end{aligned}$$

eliminiert, so erhält man

$$2 y y'' - y'^2 + 4 = 0, \tag{9}$$

ohne daß hier bei der Elimination irgendwelche Faktoren (abgesehen von c_1) herausgehoben worden wären.

Diese Differentialgleichung (9) *ist also nur vom ersten Grad und liefert für gegebene Anfangswerte $x = x_1$, $y = y_1$, $y' = y_1'$ nur eine einzige Lösung*, während die Doppelgeraden $(x - c)^2 = 0$ überhaupt nicht als Lösun-

gen der Differentialgleichung, im eigentlichen Sinn, gelten können. ***Dagegen gibt es durch zwei getrennte, wenn auch noch so nahe gelegene Punkte stets zwei Lösungen***[3]), und zwar ergeben sich die Tangenten im Punkt x_1, y_1 an die beiden Kurven durch eine kleine Drehung aus der Sehne $P_1 P_2$ und aus der Geraden $x - x_1 = 0$, welche ev. als Ausartung der von (x_1, y_1) ausgehenden Integralkurven festzustellen wäre. Die Figur 1 soll ein Bild geben von den zwei Lösungen; es ist klar, daß für beide Lösungen je eine nach Potenzen von $x - x_1$ fortschreitende endliche Reihenentwicklung gilt, welche für $x = x_2$ den Wert y_2 annimmt.

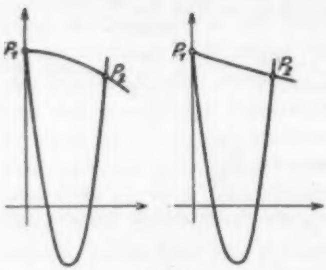


Fig. 1.

Zunächst ganz ähnlich wie in dem soeben behandelten Beispiel liegen die Verhältnisse bei der aus Ellipsen und Hyperbeln bestehenden Kurvenschar:

$$(10) \qquad f(x, y, c_1, c_2) \equiv (c_1 x + c_2)^2 - c_1 y^2 - 1 = 0,$$

welcher wieder die Doppelgeraden $(x - c)^2 = 0$ zugerechnet werden müssen. Durch irgend zwei Punkte gehen zwei Kurven der Schar, und zwar ist, wie man aus dem untenstehnden Wert von c_1 sieht, mindestens eine dieser Kurven eine Hyperbel, deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Zu einem Punkt mit gegebener Tangente gibt es wieder nur *eine* Kurve und entsprechend ist die Differentialgleichung der Kurvenschar nur vom ersten Grad, nämlich

$$(11) \qquad y^3 y'' + 1 = 0.$$

Der Unterschied gegen das vorhergehende Beispiel besteht nur darin, daß die Punkte P_1 und P_2 jedenfalls bei einer dieser Kurven auf zwei getrennten Zweigen einer Hyperbel liegen. Die Entwicklung dieser Lösung an der Stelle (x_1, y_1) nach Potenzen von $x - x_1$ kann niemals für $x = x_2$ gültig sein. Man kann von der Stelle (x_1, y_1) zu (x_2, y_2) immer nur auf dem Wege der analytischen Fortsetzung gelangen. Es ist aber doch wohl berechtigt, auch in solchen Fällen von *zwei* Lösungen durch zwei Punkte zu reden, denn der Fall,

[3]) Hierbei ist zu berücksichtigen, daß y' nicht beschränkt ist. Deshalb ist das Vorstehende nicht im Widerspruch mit einem bekannten Satz von E. Picard aus dessen Übertragung der sukzessiven Approximation auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Vgl. E. Picard, Traité d'Analyse, Bd. 3, 1896, S. 99 und M. Bôcher, Enzykl. d. M. W. II. 1, S. 457. Bei größeren Entfernungen $P_1 P_2$ könnten allerdings die beiden Lösungen ganz ähnliches Aussehen bekommen und eine Bevorzugung der einen Lösung zufällig werden.

daß eine Entwicklung nach Potenzen von $x-x_1$ an der zweiten Stelle $x=x_2$ nicht mehr gilt, kann auch eintreten, wenn die *Kurve* zwischen beiden Punkten zusammenhängend ist, aber eine vertikale Tangente besitzt.

Stellt man die Parameterwerte auf für die Kurven, welche durch zwei gegebene Punkte gehen:

$$c_1 = \frac{y_1^2 + y_2^2 \pm 2\sqrt{y_1^2 y_2^2 + (x_1 - x_2)^2}}{(x_1 - x_2)^2},$$

so erkennt man, daß die Punkte P_2, welche mit einem gegebenen Punkt P_1 zusammen nur eine einzige Kurve der Schar bestimmen, keine Kurve erfüllen, denn $y_1^2 y_2^2 + (x_1 - x_2)^2$ ist definit und nur gleich Null, wenn $x_2 = x_1$, $y_2 = 0$ ist, was auf die doppeltzählenden Parallelen zur y-Achse führt, die nicht eigentliche Lösungen der Differentialgleichung sind.

Ist ganz allgemein eine ∞^2-Kurvenschar gegeben mit der Gleichung $f(x, y, c_1, c_2) = 0$ und gehen durch zwei ev. beliebig nahe Punkte P_1, P_2 noch m Kurven (eine *endliche* Anzahl) der Schar mit den Parameterwerten $c_1, c_1', \ldots$, so haben die vorausgegangenen Beispiele die Tatsache erläutert, daß von diesen Parameterwerten, aufgefaßt als Funktionen von x_1, y_1, x_2, y_2 einer oder mehrere unabhängig voneinander einem Grenzwert zustreben können, wenn P_1, P_2 auf einer gegebenen Geraden zusammenrücken, während die übrigen unbegrenzt wachsen oder unbestimmt werden können. Von den Kurven können die zu den letzteren Parametern gehörigen in mehrfacher Weise ausarten: sie können z. B. in reelle Doppelkurven übergehen oder in imaginäre mit reellem Doppelpunkt.

Das naheliegendste Beispiel für den letzten Fall mag die Gleichung $f(x, y, c_1, c_2,) \equiv (x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = 0$ bieten, wo die Doppelpunkte die ganze Ebene erfüllen. Bei ∞^n-Kurvenscharen, in denen $n > 2$ ist, ist wohl noch der Fall denkbar, daß die Ausartung entsteht, indem ein Oval sich zusammenzieht, d. h. in ein imaginäres Geradenpaar mit reellem Doppelpunkt übergeht.

Eliminiert man andererseits c_1, c_2 aus den drei Gleichungen:

$$f(x, y, c_1, c_2) = 0, \qquad \frac{d f(x, y, c_1, c_2)}{dx} = 0, \qquad \frac{d^2 f(x, y, c_1, c_2)}{dx^2} = 0$$

(falls dies möglich ist), so resultiert eine Gleichung, deren Grad in y'' kleiner als m ist, und ebenso groß ist wie die Zahl der Konstanten $c, c', \ldots$, welche für zusammenfallende Werte $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ und $\lim \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \operatorname{tg} \nu$ einen bestimmten endlichen Grenzwert annehmen.

Der Grad der Differentialgleichung wird um 1 vermindert, wenn zu der Kurvenschar Ausartungen gehören, wie eine ∞^1 Schar von Doppelkurven (Doppelgeraden) oder Kurven mit isolierten Doppelpunkten.

Hiernach verliert aber der Begriff des „Grades" für die Differentialgleichungen höherer Ordnung ganz die Bedeutung, die er noch für Differentialgleichungen erster Ordnung besitzt und es besteht keine Analogie zu dem Grad einer algebraischen Gleichung. Es ist verständlich, wenn die Bezeichnung Grad in der neueren Literatur kaum mehr zur Anwendung kommt[4]). Andererseits steht man vor besonderen Schwierigkeiten bei der Aufgabe, diejenigen Lösungen einer Differentialgleichung 2. Ordnung zu bestimmen, welche durch zwei gegebene Punkte hindurchgehen. Man erhält nur eine reelle Kurve für eine *lineare* Differentialgleichung und auch umgekehrt, während sonst mehrere Lösungen zu erwarten sind. Die Typen dieser Lösungen stellt die Figur 2 dar.

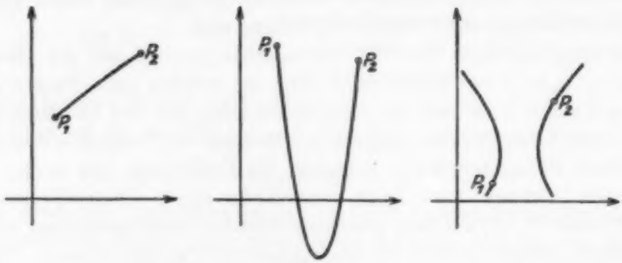


Fig. 2.

Für die erste Kurve ergibt sich ein Ansatz zur näherungsweisen Bestimmung, indem man von der Sehne ausgeht. Für die übrigen Fälle ist es vorteilhaft, wenn man die Ausartungen der Integralkurven durch einen Punkt P_1 kennt, indem man dann von diesen ausgehend die Kurven durch zwei benachbarte Punkte zeichnet. Im dritten Fall, wo zwei Zweige einer Integralkurve durch P_1 und P_2 hindurchgehen, bedarf man auch der Kenntnis der ausgearteten (Doppel-) Lösungen, jedoch ist es meist schwer, zusammengehörige Zweige als solche zu erkennen. Im allgemeinen bedarf es hier einer analytischen Fortsetzung durch das komplexe Gebiet. Zuweilen hilft aber schon die Einführung neuer Veränderlicher. So erkennt man z. B. leicht, daß die Gleichung

$$y^3 y'' + 1 = 0 \tag{11}$$

sich nicht ändert, wenn man y durch $\pm iz$ ersetzt, und das führt zu der Substitution

$$u = y^2$$

[4]) In den Artikeln von Painlevé, Vessiot, Hilb, Liebmann über nichtlineare Differentialgleichungen in der Enzyklopädie der Math. Wissensch. wird der Ausdruck Grad nicht gebraucht, wenigstens nicht im Sinne unserer ersten Anmerkung.

wodurch die Gleichung (9) sich ergibt:

$$2uu'' - u'^2 + 4 = 0,$$

an Stelle der Hyperbeläste erhält man Parabeln, deren Darstellung keine Schwierigkeit macht und von denen man leicht zu den Hyperbeln übergehen kann.

Es mag schließlich noch erwähnt werden, daß sich alle bisherigen Betrachtungen auf Differentialgleichungen höherer Ordnung ausdehnen lassen, wobei man zu ähnlichen Ergebnissen gelangt.

(Eingegangen am 20. 8. 1921.)

The Existence Domain of Implicit Functions.

Von

E. R. Hedrick und W. D. A. Westfall in Columbia, Mo. (U. S. A.).

1. Introduction.

In a paper published in the Bulletin de la Société Mathématique de France[1]) the authors have proven the following existence theorem for implicit functions.

Theorem 1. Let

$$\begin{gathered} f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{gathered}$$

be n functions of the $n+1$ real variables $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$,[2]) which are continuous in a region $R[|x-x_0|<h,\ |y_i-y_{i,0}|<h,\ i=1,2,\ldots,n]$ about the fixed point $P_0(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{n,0})$. If the functions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ and the variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ can be so numbered that the difference jacobian

$$j = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$a_{i,k} = \frac{f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k', \bar y_{k+1}, \ldots, \bar y_n) - f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k, \bar y_{k+1}, \ldots, \bar y_n)}{y_k'-y_k},$$

as well as the elements of the principal diagonal and the minors obtained by deleting the first i rows and the first i columns $(i=1,2,\ldots,n-1)$

---

[1]) 44, p. 1–14.

[2]) x may be an m-dimensional variable.

are definite for all choices of the points in R, then there exists a positive η and a set of n functions of x, $y_i = \varphi_i(x)$, uniquely determined for $|x - x_0| < \eta$, and such that

$$y_{i,0} = \varphi_i(x_0),$$

$$f_i[x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)] = f_i(x_0, y_{1,0}, \ldots, y_{n,0}), \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

and each of these functions is continuous for $|x - x_0| < \eta$.

The conditions imposed on the functions f at the point P are satisfied if the ordinary jacobian, based on the derivatives with respect to the y's of the functions f_i, is unequal to zero. The above conditions are then satisfied if the usual conditions for the existence of implicit functions are fulfilled. They are moreover less restrictive, since the derivatives need not exist, or, if they do exist, the conditions may be satisfied when the jacobian vanishes. It is the purpose of this paper to show that these solutions, proven to exist in the neighborhood of a point, exist throughout a domain.

2. General Properties of the Solutions.

Theorem 2. If $f_1, f_2, \ldots, f_n$ are continuous functions of $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ over a closed domain $D_{x,y}$ then the systems of values $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ in $D_{x,y}$ for which

$$(1) \qquad \begin{aligned} f_1(x, y_1, \ldots, y_n) &= f_1(x_0, y_{1,0}, \ldots, y_{n,0}) \\ f_2(x, y_1, \ldots, y_n) &= f_2(x_0, y_{1,0}, \ldots, y_{n,0}) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x, y_1, \ldots, y_n) &= f_n(x_0, y_{1,0}, \ldots, y_{n,0}) \end{aligned}$$

constitute a closed set.

For a limit point $(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n)$ of any sequence of such values must be a point of $D_{x,y}$ since $D_{x,y}$ is closed. Moreover

$$f_i(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) = f_i(x_0, y_{1,0}, \ldots, y_{n,0})$$

since the f_i are continuous in $D_{x,y}$.

Theorem 3. If the conditions of Theorem 2 are satisfied for a closed domain $D_{x,y}$ and if the difference jacobian j of Theorem 1 is definite in some vicinity of each point of $D_{x,y}$, then there are at most a finite number of distinct solutions $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ of the equations (1) for a fixed value of x.

For an infinite sequence of such points

$$(\bar{x}, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

would have a limit $(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n)$ in $D_{x,y}$ which also satisfies equations (1). There exists a positive number δ such that $j \neq 0$ for $|y_i - \bar{y}_i| < \delta$. Consider now a value of k such that $(\bar{x}, y_1^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)})$ lies in this neighborhood of the limit point. Then

$$f_i(\bar{x}, y_1^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}) - f_i(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n$$

or

$$(2) \quad \begin{cases} f_i(x, y_1^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}) & - f_i(x, \bar{y}_1, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}) \\ + f_i(x, y_1, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}) & - f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, y_3^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}) \\ + \ldots \ldots \ldots & \\ + f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_{n-1}, y_n^{(k)}) - f_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) = 0. & \end{cases}$$

The equations (2) constitute a linear relation between the corresponding elements of the columns of the difference jacobian j. Hence $j = 0$, contrary to hypothesis. Hence the supposition that an infinite number of solutions exists for some fixed x is false.

3. Properties of the Jacobian j.

Theorem 4. If at each point of a closed domain $D_{x,y}$ there exists a corresponding positive number δ such that j is definite in the δ vicinity of the point, then there exists a positive number $\bar{\delta}$, uniform for all points, such that j is definite in the $\bar{\delta}$ vicinity of each point.

This follows immediately from the Heine-Borel theorem. As a consequence we have the following theorem:

Theorem 5. If j is definite in a vicinity of each point of a closed connected domain $D_{x,y}$ then j is one-signed throughout $D_{x,y}$.

4. Extension of the Solutions over a Domain.

Theorem 6. If the conditions of Theorem 1 are satisfied in a vicinity of every interior point of a closed domain $D_{x,y}$, and if the functions f_i are continuous on the frontier of $D_{x,y}$, then the solutions

$$y_i = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

which exist in the vicinity of an interior point $[x_0]$, may be extended as continuous functions along any continuous Jordan curve to the frontier of $D_{x,y}$.

Denote by D_x the x-projections of $D_{x,y}$. Let the curve in D_x be denoted by

$$x_i = x_i(t), \quad x_i(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Then in a vicinity of $[x_0]$ there exist continuous solutions. Let $t = \bar{t}$ be the upper limit of the values of t such that the $(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ lie in $D_{x,y}$ and the solutions are continuous. Let a limit of the y_i for $t = \bar{t}$ be $\bar{y}_i$. Then $(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ are solutions of equations (1) from the continuity of the f_i. Hence, if this is not a frontier point of D, there exist continuous solutions in the neighborhood of the point, contrary to the supposition that $t = \bar{t}$ gives the upper limit of such continuous solutions.

(Eingegangen am 12. 10. 1921.)

Über die kanonischen Veränderlichen in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale.

Von

C. Carathéodory in Smyrna*).

Einleitung.

1. Man ist bisher der Meinung gewesen, daß die gewöhnliche Legendresche Transformation auch in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale Koordinaten liefert, die den von Hamilton entdeckten kanonischen Veränderlichen der Variationsrechnung der Linienintegrale entsprechen[1]). Dies ist aber, wie aus den folgenden Überlegungen ersichtlich, nicht der Fall: statt der Legendreschen Transformation kommt hier eine Verallgemeinerung derselben in Betracht, welche von der Mehrfachheit μ des betrachteten Integrals abhängt, und nur für $\mu = 1$ mit der ersten zusammenfällt.

Ableitung einiger Hilfssätze.

2. Wir betrachten μ Funktionen

$$S_\alpha(x_i;\, t_\beta) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\; \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{1}$$

die von den $(n + \mu)$ Veränderlichen x_i und t_β abhängen, und werden auch stets im folgenden lateinische Buchstaben für diejenigen Indizes benutzen, die von 1 bis n, griechische dagegen für diejenigen Indizes, die von 1 bis μ laufen.

Wir setzen zur Abkürzung

$$S_{\alpha i} = \frac{\partial S_\alpha}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad S_{\alpha\beta} = \frac{\partial S_\alpha}{\partial t_\beta}; \tag{2}$$

---

*) Das Problem für $n = 2$ habe ich in griechischer Sprache vor kurzem behandelt: „Über eine der Legendreschen analoge Transformation," Bulletin der Griechischen Math. Gesellschaft **7** (1921).

[1]) Vito Volterra, Sulle equazioni differenziali che provengono da questioni di calcolo delle variazioni. Roma, Acc. Lincei Rend. (4) **6**[1] (1890), S. 43. — Georg Prange, Die Hamilton-Jacobische Theorie für Doppelintegrale. Diss. Göttingen 1915.

mit dieser Bezeichnung ist, falls man in den Funktionen (1) die x_i durch Funktionen der t_β ersetzt, und außerdem noch die Symbole

$$p_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial t_\alpha} \tag{3}$$

einführt, die Funktionaldeterminante Δ dieser neuen Funktionen nach den t_β durch die Gleichung gegeben:

$$\Delta = |c_{\alpha\beta}|, \tag{4}$$

wobei

$$c_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + \sum_i S_{\alpha i} p_{i\beta} \tag{5}$$

ist.

Falls man die Determinante (4) als Polynom

$$\Delta = F + \sum_{i,\alpha} P_{i\alpha} p_{i\alpha} + \ldots \tag{6}$$

in den $p_{i\alpha}$ entwickelt, so werden die Koeffizienten F und $P_{i\alpha}$ der Glieder niedrigster Ordnung folgendermaßen mit Hilfe der ersten Ableitungen der S_α dargestellt: man hat

$$F = |S_{\alpha\beta}|, \tag{7}$$

und, wenn man mit $\bar{S}_{\alpha\beta}$ das algebraische Komplement von $S_{\alpha\beta}$ in dieser Determinante bezeichnet,

$$P_{i\alpha} = \sum_\varrho S_{\varrho i} \bar{S}_{\varrho\alpha}. \tag{8}$$

Wir werden bald sehen, daß sich sämtliche übrigen Koeffizienten des Polynoms (6) *rational* in F und den $P_{i\alpha}$ darstellen lassen.

3. Wir führen die Bezeichnung ein

$$\pi_{i\alpha} = \frac{\partial \Delta}{\partial p_{i\alpha}}; \tag{9}$$

dann ist nach (4) und (5), falls man mit $\bar{c}_{\alpha\beta}$ das algebraische Komplement von $c_{\alpha\beta}$ in der Determinante (4) bezeichnet,

$$\pi_{i\alpha} = \sum_\varrho S_{\varrho i} \bar{c}_{\varrho\alpha}. \tag{10}$$

Wir wollen zunächst zeigen, daß man die Größen F und $P_{i\alpha}$ als rationale Funktionen von Δ, $p_{i\alpha}$, $\pi_{i\alpha}$ darstellen kann.

Dazu betrachten wir den Ausdruck

$$a_{\alpha\beta} = \sum_\varrho S_{\varrho\alpha} \bar{c}_{\varrho\beta} \tag{11}$$

und bemerken, daß diese Größe rational in $\varDelta$, $p_{i\alpha}$, $\pi_{i\alpha}$ ausgedrückt werden kann: in der Tat ist nach (4) und (5), falls man mit $\delta_{\alpha\beta}$ eine Größe bezeichnet, die für $\alpha = \beta$ gleich Eins und für $\alpha \neq \beta$ gleich Null ist,

$$\delta_{\alpha\beta}\varDelta = \sum_{\varrho} c_{\varrho\alpha}\bar{c}_{\varrho\beta} = \sum_{\varrho, i}(S_{\varrho\alpha} + S_{\varrho i}p_{i\alpha})\bar{c}_{\varrho\beta},$$

und daher, wenn man diesen letzten Ausdruck mit (10) und (11) vergleicht,

$$(12) \qquad a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\varDelta - \sum_{i} p_{i\alpha}\pi_{i\beta}.$$

Nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten folgt nun aus (11)

$$|a_{\alpha\beta}| = |S_{\alpha\beta}| \cdot |\bar{c}_{\alpha\beta}|;$$

es ist aber, nach einem bekannten Satz der Determinantentheorie, falls man auf die Ordnung μ der Determinante $|c_{\alpha\beta}|$ achtet,

$$|\bar{c}_{\alpha\beta}| = |c_{\alpha\beta}|^{\mu-1} = \varDelta^{\mu-1}$$

und daher, wenn man (7) berücksichtigt,

$$(13) \qquad \varDelta^{\mu-1}F = |a_{\alpha\beta}|.$$

Durch die Relationen (12) und (13) ist nunmehr F rational in $\varDelta$, $p_{i\alpha}$, $\pi_{i\alpha}$ ausgedrückt.

4. Nach (8) und (11) ist andererseits

$$\sum_{\lambda} P_{i\lambda}a_{\lambda\alpha} = \sum_{\lambda, \varrho, \sigma} S_{\varrho i}\bar{S}_{\varrho\lambda}S_{\sigma\lambda}\bar{c}_{\sigma\alpha};$$

nun haben wir aber wegen (7)

$$\sum_{\lambda} S_{\sigma\lambda}\bar{S}_{\varrho\lambda} = \delta_{\varrho\sigma}F,$$

und man hat daher

$$\sum_{\lambda} P_{i\lambda}a_{\lambda\alpha} = \sum_{\varrho, \sigma}\delta_{\varrho\sigma}F \cdot S_{\varrho i}\bar{c}_{\sigma\alpha} = F\sum_{\varrho} S_{\varrho i}\bar{c}_{\varrho\alpha}$$

oder, wenn man (10) berücksichtigt,

$$(14) \qquad F\pi_{i\alpha} = \sum_{\lambda} P_{i\lambda}a_{\lambda\alpha}.$$

Wir bezeichnen mit $\bar{a}_{\alpha\beta}$ das algebraische Komplement von $a_{\alpha\beta}$ in der Determinante $|a_{\alpha\beta}|$; dann folgt aus (14)

$$F\sum_{\varrho}\pi_{i\varrho}\bar{a}_{\alpha\varrho} = \sum_{\lambda, \varrho} P_{i\lambda}a_{\lambda\varrho}\bar{a}_{\alpha\varrho},$$

und da infolge von (13)

$$\sum_{\varrho} a_{\lambda\varrho}\bar{a}_{\alpha\varrho} = \delta_{\alpha\lambda}\Delta^{\mu-1}F$$

ist, hat man schließlich, wenn man noch rechts und links durch F dividiert

(15) $$\Delta^{\mu-1}P_{i\alpha} = \sum_{\varrho}\pi_{i\varrho}\bar{a}_{\alpha\varrho}.$$

Hiermit sind auch die $P_{i\alpha}$ rational in Δ, $p_{i\alpha}$, $\pi_{i\alpha}$ dargestellt.

Relationen zwischen den Determinanten, die als Koeffizienten der $p_{i\alpha}$ in Δ erscheinen.

5. Aus (15) entnehmen wir die Relation

$$\Delta^{\mu-1}\sum_{i} P_{i\alpha}p_{i\beta} = \sum_{i,\varrho}\pi_{i\varrho}\bar{a}_{\alpha\varrho}p_{i\beta};$$

nun ist nach (12)

$$\sum_{i} p_{i\beta}\pi_{i\varrho} = \delta_{\beta\varrho}\Delta - a_{\beta\varrho},$$

und man hat daher, falls man noch (13) berücksichtigt,

$$\begin{aligned}\Delta^{\mu-1}\sum_{i} P_{i\alpha}p_{i\beta} &= \sum_{\varrho}\bar{a}_{\alpha\varrho}(\delta_{\beta\varrho}\Delta - a_{\beta\varrho})\\ &= \Delta\cdot\bar{a}_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\Delta^{\mu-1}F.\end{aligned}$$

Wir haben also schließlich die Relation

(16) $$\bar{a}_{\alpha\beta} = \Delta^{\mu-2}\Big(\delta_{\alpha\beta}F + \sum_{i} P_{i\alpha}p_{i\beta}\Big);$$

hieraus folgt nun

$$|\bar{a}_{\alpha\beta}| = \Delta^{\mu(\mu-2)}\Big|\delta_{\alpha\beta}F + \sum_{i} P_{i\alpha}p_{i\beta}\Big|,$$

während andererseits wegen (13) die Relation gilt

$$|\bar{a}_{\alpha\beta}| = |a_{\alpha\beta}|^{\mu-1} = \Delta^{(\mu-1)^2}F^{\mu-1}.$$

Die beiden letzten Gleichungen liefern uns endlich die Beziehung

$$F^{\mu-1}\Delta = \Big|\delta_{\alpha\beta}F + \sum_{i} P_{i\alpha}p_{i\beta}\Big|,$$

oder ausführlicher geschrieben:

(17) $$\Big|S_{\alpha\beta} + \sum_{i} S_{\alpha i}p_{i\beta}\Big| = F^{1-\mu}\Big|\delta_{\alpha\beta}F + \sum_{i} P_{i\alpha}p_{i\beta}\Big|.$$

Diese letzte Gleichung ist eine Identität, sobald F und die $P_{i\alpha}$ durch

die Gleichungen (7) und (8) definiert werden. Sie lehrt uns zweierlei: erstens, daß alle Koeffizienten des Polynoms (6) — wie wir es angekündigt hatten — rational in F und den $P_{i\alpha}$ darstellbar sind, und zweitens, daß es genügt die Gleichungen (7) und (8) zu erfüllen, damit die rechte Seite von (17) eine Funktionaldeterminante darstelle[2]).

Definition der kanonischen Koordinaten des Variationsproblems.

6. Wir betrachten das Variationsproblem

$$J = \int \ldots \int f(x_i;\, t_\alpha;\, p_{i\alpha})\, dt_1 \ldots dt_\mu \tag{18}$$

und bemerken, daß, nach einem bekannten Schluß[3]), eine n-parametrige Schar von μ-dimensionalen Flächen

$$x_i = x_i(t_\alpha;\, \lambda_j) \tag{19}$$

dann und nur dann ein Feld von Extremalenflächen unseres Integrals (18) bildet, wenn außer den Funktionen (19) noch Funktionen (1) existieren, so daß mit unseren früheren Bezeichnungen die Gleichungen

$$f = \Delta, \qquad f_{p_{i\alpha}} = \Delta_{p_{i\alpha}} = \pi_{i\alpha} \tag{20}$$

gleichzeitig erfüllt werden.

Es entspricht nun dem Verfahren, das man in der Variationsrechnung der Linienintegrale befolgt, wenn wir unsere Größen $P_{i\alpha}$ als kanonische Veränderliche einführen, wobei dann — wie wir sofort sehen werden — die Größe F eine Funktion der $P_{i\alpha}$ wird, die der Hamiltonschen Funktion entspricht. Hierzu genügt es, in den Formeln (12), (13) und (15) die Größe Δ durch f zu ersetzen, d. h. von den Gleichungen auszugehen:

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} f - \sum_i p_{i\alpha}\pi_{i\beta}, \tag{21}$$

$$f^{\mu-1} F = |a_{\alpha\beta}|, \tag{22}$$

$$f^{\mu-1} P_{i\alpha} = \sum_\varrho \pi_{i\varrho}\bar{a}_{\alpha\varrho}. \tag{23}$$

Setzt man in alle diese Gleichungen

$$\pi_{i\alpha} = f_{p_{i\alpha}} \tag{24}$$

nach (20) ein, so erscheinen F und die $P_{i\alpha}$ als Funktionen der $p_{i\alpha}$. Falls

---

[2]) Aus der Gleichung (17) folgen auch nebenbei, wie man sich leicht überzeugt, sämtliche Relationen, die zwischen den Determinanten einer Matrix von n Zeilen und $(n+\mu)$ Kolonnen stattfinden.

[3]) C. Carathéodory, Sur le traitement géométrique des extréma des intégrales doubles. L'Enseignement Mathématique 19 (1917), S. 329.

nun die Funktionaldeterminante der $P_{i\alpha}$ nach den $p_{i\alpha}$ nicht identisch verschwindet, so können wir die $p_{i\alpha}$ als Funktionen der $P_{i\alpha}$ und daher auch F als Funktion dieser Größen berechnen.

Statt der Jacobi-Hamiltonschen Differentialgleichung hat man wieder *eine einzige* partielle Differentialgleichung, aber hier zwischen μ Funktionen, nämlich den S_α; diese erhält man, indem man F und die $P_{i\alpha}$ durch ihre Werte (7) und (8) ersetzt und die Beziehung zwischen F und $P_{i\alpha}$ berücksichtigt. Es kommen allerdings hier gewisse Integrabilitätsbedingungen hinzu, die man am kürzesten mit Hilfe der Gleichungen

$$dx_i = \sum_\alpha p_{i\alpha} dt_\alpha \tag{25}$$

schreiben kann; aus dem folgenden schließt man aber leicht, daß auch diese Gleichungen mit Hilfe unserer neuen kanonischen Veränderlichen ausdrückbar sind.

In der Tat wird sich zeigen, daß man unsere kanonischen Veränderlichen durch eine Transformation erhält, die mit der Legendreschen die größte Ähnlichkeit hat.

Relation zwischen den Differentialen.

7. Bekanntlich erhält man durch Differentiation der Determinante $|a_{\alpha\beta}|$

$$d\,|a_{\alpha\beta}| = \sum_{\alpha,\beta} \bar{a}_{\alpha\beta}\, da_{\alpha\beta}. \tag{26}$$

Nun hat man aber andererseits

$$\mu \cdot |a_{\alpha\beta}| = \sum_{\alpha,\beta} \bar{a}_{\alpha\beta}\, a_{\alpha\beta},$$

und wenn man diese Gleichung differentiiert,

$$\mu\, d\,|a_{\alpha\beta}| = \sum_{\alpha,\beta} \left(\bar{a}_{\alpha\beta}\, da_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}\, d\,\bar{a}_{\alpha\beta}\right). \tag{27}$$

Zieht man also (26) von (27) ab, so kommt schließlich:

$$(\mu - 1)\, d\,|a_{\alpha\beta}| = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, d\,\bar{a}_{\alpha\beta}. \tag{28}$$

Wenn man in unseren früheren Rechnungen überall Δ durch f ersetzt, erhält man statt (16) die Gleichung

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = f^{\mu-2}\left(\delta_{\alpha\beta} F + \sum_i P_{i\alpha}\, p_{i\beta}\right). \tag{29}$$

Aus dieser letzten Relation und aus (22) entnehmen wir nun, daß wir statt (28) schreiben können:

$$(\mu - 1)\, d\,(f^{\mu-1} F) - \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, d\left[f^{\mu-2}\left(\delta_{\alpha\beta} F + \sum P_{i\alpha}\, p_{i\beta}\right)\right] = 0. \tag{30}$$

Der Koeffizient von df in $d\left[f^{\mu-2}\left(\delta_{\alpha\beta}F+\sum_i P_{i\alpha}p_{i\beta}\right)\right]$ ist, wenn man (29) berücksichtigt,

$$(\mu-2)f^{\mu-3}\frac{\bar{a}_{\alpha\beta}}{f^{\mu-2}}=\frac{\mu-2}{f}\bar{a}_{\alpha\beta}.$$

Der Koeffizient von df im Ausdrucke (30) ist also:

$$(\mu-1)^2 f^{\mu-2}F-\sum_{\alpha,\beta}\frac{\mu-2}{f}\bar{a}_{\alpha\beta}a_{\alpha\beta}=[(\mu-1)^2-\mu(\mu-2)]f^{\mu-2}F$$

oder schließlich

$$f^{\mu-2}F.$$

Der Koeffizient von $dp_{i\beta}$ im Ausdrucke (30) ist

$$-f^{\mu-2}\sum_\alpha a_{\alpha\beta}P_{i\alpha}$$

oder, wenn man (14) berücksichtigt,

$$-f^{\mu-2}F\pi_{i\beta}.$$

Wir können also statt (30) schreiben, falls wir die Koeffizienten von dF und $dP_{i\alpha}$ in diesem Ausdrucke mit $f^{\mu-2}\varphi$ bzw. $-f^{\mu-2}\varphi\Pi_{i\alpha}$ bezeichnen und alles durch $f^{\mu-2}$ dividieren:

$$F\left(df-\sum_{i,\alpha}\pi_{i\alpha}dp_{i\alpha}\right)+\varphi\left(dF-\sum_{i,\alpha}\Pi_{i\alpha}dP_{i\alpha}\right)=0. \tag{31}$$

Wir müssen noch φ und $\Pi_{i\alpha}$ berechnen. Für $\Pi_{i,\alpha}$ kommt zunächst, falls wir in (30) den Summationsbuchstaben β durch σ ersetzen:

$$\varphi\,\Pi_{i\alpha}=\sum_\sigma p_{i\sigma}a_{\alpha\sigma}, \tag{32}$$

und für φ erhalten wir die Gleichung:

$$f^{\mu-2}\varphi=(\mu-1)f^{\mu-1}-f^{\mu-2}\sum_\alpha a_{\alpha\alpha}.$$

Nun ist nach (21)

$$\sum_\alpha a_{\alpha\alpha}=\mu f-\sum_{i,\alpha}p_{i\alpha}\pi_{i\alpha},$$

so daß wir φ auch durch die Gleichung definieren können:

$$f+\varphi=\sum_{i,\alpha}p_{i\alpha}\pi_{i\alpha}. \tag{33}$$

8. Die Funktion f hängt nach (18) von den Größen x_i, t_α und $p_{i\alpha}$ ab; ihre erste Ableitung nach $p_{i\alpha}$ ist nach (24) gleich $\pi_{i\alpha}$. Man hat also:

$$df-\sum_{i,\alpha}\pi_{i\alpha}dp_{i\alpha}=\sum_{i,\alpha}\left(f_{x_i}dx_i+f_{t_\alpha}dt_\alpha\right). \tag{34}$$

Hieraus und aus (33) folgt, wenn man mit Hilfe der Gleichungen (24) die $p_{i\alpha}$ als Funktionen von $x_i, t_\alpha, \pi_{i\alpha}$ berechnet und φ als Funktion dieser letzten Größen betrachtet, daß φ die *Legendresche Transformierte* von f ist und daß daher die Gleichungen

$$(35) \qquad \varphi_{x_i} = -f_{x_i}, \quad \varphi_{t_\alpha} = -f_{t_\alpha}, \quad \varphi_{\pi_{i\alpha}} = p_{i\alpha}$$

gelten.

Zweitens folgen aber aus (31) und (34), wenn man — wie wir oben erklärten — die Größe F als Funktion von x_i, t_α, P_{i_α} betrachtet, die Relationen

$$(36) \qquad \varphi F_{x_i} = -F f_{x_i}, \quad \varphi F_{t_\alpha} = -F f_{t_\alpha}, \quad F_{P_{i\alpha}} = \Pi_{i\alpha}.$$

Wir können also, genau wie es bei der Legendreschen Transformation der Fall ist, nicht nur F, sondern auch die ersten Ableitungen dieser Funktion *rational* in $p_{i\alpha}$, $f_{p_{i\alpha}}$ und f, oder auch, wenn man will, in $\pi_{i\alpha}$, $\varphi_{\pi_{i\alpha}}$ und φ ausdrücken. Zur größeren Symmetrie führen wir endlich durch die Gleichung

$$(37) \qquad F + \Phi = \sum_{i,\alpha} \Pi_{i\alpha} P_{i\alpha}$$

die Legendresche Transformierte Φ von F ein. Betrachtet man Φ als Funktion von $x_i, t_\alpha, \Pi_{i\alpha}$, so gelten die Gleichungen

$$(38) \qquad \Phi_{x_i} = -F_{x_i}, \quad \Phi_{t_\alpha} = -F_{t_\alpha}, \quad \Phi_{\Pi_{i\alpha}} = P_{i\alpha}.$$

Birationalität der Transformation.

9. Die Ähnlichkeit unserer neuen Transformation mit der Legendreschen ist größer als auf den ersten Blick erscheint: wir wollen nämlich noch zeigen, daß man die Gleichungen (22), (23), (32) und (33) nach $f, \varphi, p_{i\alpha}, \pi_{i\alpha}$ auflösen kann und daß diese Größen rationale Funktionen von $P_{i\alpha}$, $\Pi_{i\alpha}$ und Φ, oder, was im Hinblick auf (37) dasselbe ist, rationale Funktionen von $P_{i\alpha}$, $\Pi_{i\alpha}$, F sind. Wir können daher f, $p_{i\alpha}$, $\pi_{i\alpha}$ und φ als rationale Funktionen von $P_{i\alpha}$, F und $F_{P_{i\alpha}}$ darstellen.

Um dieses Resultat festzustellen, berechnen wir mit Hilfe von (23) und (32) den Ausdruck

$$f^{\mu-1} \varphi \sum_i \Pi_{i\alpha} P_{i\beta} = \sum_{i,\varrho,\sigma} p_{i\sigma} a_{\alpha\sigma} \pi_{i\varrho} \bar{a}_{\beta\varrho}.$$

Nun ist nach (21)

$$\sum_i p_{i\sigma} \pi_{i\varrho} = \delta_{\sigma\varrho} f - a_{\sigma\varrho}$$

und daher

$$f^{\mu-1} \varphi \sum_i \Pi_{i\alpha} P_{i\beta} = \sum_{\varrho\sigma} a_{\alpha\sigma} \bar{a}_{\beta\varrho} (\delta_{\sigma\varrho} f - a_{\sigma\varrho}) = \sum_\sigma (f a_{\alpha\sigma} \bar{a}_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\beta} f^{\mu-1} F a_{\alpha\alpha}),$$

oder, wenn man die Summe über σ ausführt und rechts und links durch $(f^{\mu-1}$ dividiert,

(39)
$$\varphi \sum_i \Pi_{i\alpha} P_{i\beta} = F(\delta_{\alpha\beta} f - a_{\alpha\beta}),$$

also schließlich mit Hilfe von (21):

(40)
$$\varphi \sum_i \Pi_{i\alpha} P_{i\beta} = F \sum_i p_{i\alpha} \pi_{i\beta}.$$

Aus (40) folgt nun

$$\varphi \sum_{i,\alpha} \Pi_{i\alpha} P_{i\alpha} = F \sum_{i,\alpha} p_{i\alpha} \pi_{i\alpha}$$

und, wenn man die Gleichungen (33) und (37) benutzt,

$$\varphi (F + \Phi) = F(f + \varphi)$$

oder

(41)
$$f \cdot F = \varphi \cdot \Phi.$$

Aus (39) und (41) entnehmen wir nun:

$$F a_{\alpha\beta} = \varphi (\delta_{\alpha\beta} \Phi - \sum_i \Pi_{i\alpha} P_{i\beta})$$

oder, wenn wir die Bezeichnung

(42)
$$A_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \Phi - \sum_i \Pi_{i\alpha} P_{i\beta}$$

einführen,

$$F a_{\alpha\beta} = \varphi A_{\alpha\beta}.$$

Diese letzte Gleichung läßt sich wegen (41) auch schreiben:

(43)
$$\frac{1}{f} a_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Phi} A_{\alpha\beta}.$$

10. Aus der Relation (43) folgt zunächst

(44)
$$\frac{1}{f^\mu} |a_{\alpha\beta}| = \frac{1}{\Phi^\mu} |A_{\alpha\beta}|.$$

Setzt man in (44) den Wert (22) von $|a_{\alpha\beta}|$ ein und berücksichtigt (37), so erhält man f als rationale Funktion von $P_{i\alpha}$, $\Pi_{i\alpha}$ und Φ; es gilt nämlich die Gleichung

(45)
$$f = \frac{F \Phi^\mu}{|A_{\alpha\beta}|}.$$

Aus dieser letzten Gleichung und aus (41) folgt ferner

(46)
$$\varphi = \frac{F^2 \Phi^{\mu-1}}{|A_{\alpha\beta}|},$$

wodurch φ ebenfalls rational in unseren neuen Veränderlichen erscheint.

Ferner folgt aus der Gleichung (14) mit Hilfe von (43)

$$\frac{F}{f}\pi_{i\alpha} = \frac{1}{\Phi}\sum_\lambda P_{i\lambda} A_{\lambda\alpha},$$

oder, wenn man (45) berücksichtigt,

$$\pi_{i\alpha} = \frac{\Phi^{\mu-1}}{|A_{\alpha\beta}|}\sum_\lambda P_{i\lambda} A_{\lambda\alpha}. \tag{46}$$

Es bleibt also nur noch $p_{i\alpha}$ in den neuen Veränderlichen zu berechnen. Aus (32) und (43) folgt zunächst:

$$\frac{\varphi}{f}\Pi_{i\alpha} = \frac{1}{\Phi}\sum_\sigma p_{i\sigma} A_{\alpha\sigma},$$

oder mit Rücksicht auf (41):

$$F\Pi_{i\alpha} = \sum_\sigma p_{i\sigma} A_{\alpha\sigma}.$$

Wir entnehmen hieraus, wenn wir mit $\bar{A}_{\alpha\beta}$ das algebraische Komplement von $A_{\alpha\beta}$ in der Determinante $|A_{\alpha\beta}|$ bezeichnen,

$$F\sum_\varrho \Pi_{i\varrho}\bar{A}_{\varrho\alpha} = \sum_{\varrho,\sigma} p_{i\sigma} A_{\varrho\sigma}\bar{A}_{\varrho\alpha} = \sum_\sigma \delta_{\alpha\sigma}|A_{\alpha\beta}|\, p_{i\sigma}$$

und schließlich

$$p_{i\alpha} = \frac{F}{|A_{\alpha\beta}|}\sum_\varrho \Pi_{i\varrho}\bar{A}_{\varrho\alpha}. \tag{47}$$

Hiermit ist die Birationalität unserer Transformation in allen Einzelheiten erwiesen.

11. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß unter der Voraussetzung, daß die in Betracht kommenden Eliminationen möglich sind, die Funktion $F(x_i, t_\alpha, P_{i\alpha})$ – genau wie die Hamiltonsche Funktion – willkürlich gewählt werden kann. Dazu muß man sich davon überzeugen, daß unsere Transformation, genau so gut wie aus den Gleichungen (22), (23), (32), (33) und (37), auch mit Hilfe der Gleichung (37), verbunden mit den Gleichungen (44) – (47) definiert werden kann. Dieses führt zu Rechnungen, die den früheren Punkt für Punkt entsprechen: bildet man zunächst, von (46) und (47) ausgehend, den Ausdruck $\sum p_{i\alpha}\pi_{i\beta}$ und berücksichtigt die Relationen (42) und (45), so findet man erstens

$$fA_{\alpha\beta} = \Phi a_{\alpha\beta} \tag{48}$$

und zweitens, wenn man bemerkt, daß (41) auch aus (45) und (46) folgt, und wenn man die Definition von $a_{\alpha\beta}$ und $A_{\alpha\beta}$ berücksichtigt,

$$f\sum_i \Pi_{i\alpha} P_{i\beta} = \Phi\sum p_{i\alpha}\pi_{i\beta}.$$

Hieraus zeigt man aber wie oben, daß (33) aus (37) folgt. Aus (48) entnimmt man

$$f^{\mu} \,|A_{\alpha\beta}| = \Phi^{\mu} \,|a_{\alpha\beta}|;$$

nun folgt aus (45)

$$|A_{\alpha\beta}| = \frac{F\,\Phi^{\mu}}{f},$$

und aus den beiden letzten Gleichungen folgt dann (22). Die Gleichungen (23) und (32) können ebenso leicht verifiziert werden.

12. Unser Resultat läßt sich in symmetrischer Weise folgendermaßen aussprechen:

Bestehen zwischen den vier Systemen von Veränderlichen

$$f, p_{i\alpha};\quad \varphi, \pi_{i\alpha};\quad F, P_{i\alpha};\quad \Phi, \Pi_{i\alpha}\qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = 1, 2, \ldots, \mu)$$

nach Einführung der Symbole

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} f - \sum_i p_{i\alpha} \pi_{i\beta}$$

die Beziehungen

$$\left\{\begin{aligned} f^{\mu-1} F &= |a_{\alpha\beta}|, \\ F\pi_{i\alpha} &= \sum_{\varrho} P_{i\varrho} a_{\varrho\alpha}, \\ f + \varphi &= \sum_{i,\alpha} p_{i\alpha} \pi_{i\alpha}, \\ \varphi\, \Pi_{i\alpha} &= \sum_{\sigma} p_{i\sigma} a_{\alpha\sigma}, \\ F + \Phi &= \sum_{i,\alpha} P_{i\alpha} \Pi_{i\alpha}, \end{aligned}\right.$$

durch welche $F, \Phi, P_{i\alpha}, \Pi_{i\alpha}$ rational in $f, p_{i\alpha}, \pi_{i\alpha}$ ausgedrückt werden, so sind erstens die Größen $f, \varphi, p_{i\alpha}, \pi_{i\alpha}$ auch umgekehrt rationale Funktionen von $F, P_{i\alpha}, \Pi_{i\alpha}$ und zweitens folgt aus dem Bestehen des einen unter den vier Gleichungssystemen

$$f_{p_{i\alpha}} = \pi_{i\alpha};\quad \varphi_{\pi_{i\alpha}} = p_{i\alpha};\quad F_{P_{i\alpha}} = \Pi_{i\alpha};\quad \Phi_{\Pi_{i\alpha}} = P_{i\alpha}$$

die Richtigkeit der drei übrigen.

(Eingegangen am 4. 8. 1921.)

Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen.

Von

Emil Hilb in Würzburg.

Im folgenden soll an den beiden Beispielen

$$f(x+1)+f(x)=g(x), \tag{1}$$

$$f(x+1)-xf(x)=g(x), \tag{2}$$

eine Theorie der linearen Differenzengleichungen mit Methoden entwickelt werden, die sich auf Differenzengleichungen endlicher oder unendlicher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten übertragen lassen, was ich aber wegen der Beschränkung in Raum und Zeit auf später verschieben muß. In gewisser Hinsicht stehen die folgenden Untersuchungen in Zusammenhang mit den schönen Ausführungen Nörlunds[1]), der formal eine Hauptlösung der Differenzengleichung durch eine unendliche Reihe (vgl. den Schluß von § 1) definiert und diese im Falle ihrer Divergenz summiert. Wir wollen dagegen im folgenden die Lösungen durch verschiedene Grenzbedingungen fixieren, wenn $g(x)$ entsprechende Bedingungen erfüllt. Verliert $g(x)$ aber diese Eigenschaft, so wird dieses auch im allgemeinen $f(x)$ tun, und die $f(x)$ definierende Reihe kann divergieren, so daß man sie summieren muß.

Als wesentliche Hilfsmittel stehen die von Schürer[2]) bez. mir[3]) ge-

[1]) N. E. Nörlund, Sur l'état actuel de la théorie des équations aux différences finies. Bull. Sc. math. 1921. Herr Nörlund hatte die Liebenswürdigkeit, mir Abzüge seiner in den Acta math. erscheinenden umfangreichen Arbeit zur Verfügung zu stellen.

[2]) F. Schürer, Eine gemeinsame Methode zur Behandlung gewisser Funktionalgleichungsprobleme. Leipz. Ber. 70 (1918), S. 185—246; vgl. auch H. v. Koch, On a class of equations connected with Euler-Maclaurin's sum formula. Ark. for Mat., Astr. och Fys. 15 Nr. 26 (1921); O. Perron, Über Summengleichungen und Poincarésche Differenzengleichungen. Math. Annalen 84 (1921), S. 1–18. E. Hilb, Lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten, 3. Mitteilung, Math. Annalen 84 (1921), S. 43–52.

[3]) E. Hilb, Lineare Differentialgleichungen usf. 1. Mitteilung, Math. Annalen 82 (1920), S. 1–39; 2. Mitteilung, Math. Annalen 84 (1921), S. 16–30.

wonnenen Resultate und Methoden für lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten, bzw. ganzen rationalen Koeffizienten zur Verfügung, ferner die von Pincherle[4]) skizzierte Methode zur Behandlung linearer Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Diese Methode läßt sich unmittelbar auf den Fall ganzer rationaler Koeffizienten übertragen und liefert neben dem Cauchyschen Integralsatz die Verbindung zwischen den verschiedenen Darstellungen.

Die Weiterbildung der Theorie zeigt, daß man durch Einführung neuer unabhängiger Veränderlicher in (4) bzw. (31) zu den Darstellungen der verschiedenen eindeutig bestimmten Lösungen kommt. An Stelle von (4) bzw. (31) tritt nach Einführung der neuen Variabeln u statt e^z, wenn die Koeffizienten der Differenzengleichung Polynome n-ten Grades sind, eine Differentialgleichung n-ter Ordnung, die „Nußgleichung" des Problems, die in nuce die ganze Theorie enthält.

Bezeichnungen. 1. Die Gesamtheit der Funktionen y, für welche

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{d^n y}{dx^n}\right|} < q,$$

wo q eine reelle Größe ist, bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}_q$.

2. $\mathfrak{R}(x)$ bedeute reellen Teil von x, c sei eine reelle Größe. Die Gesamtheit der Funktionen y, welche in einer Halbebene $\mathfrak{R}(x) > c$ bzw. $\mathfrak{R}(x) < c$ regulär sind und deren n-te Ableitungen sich in der Form

$$\frac{a}{x} + \frac{b(x)}{x^2} \tag{3}$$

in dieser Halbebene darstellen lassen, wo a eine Konstante ist, $|b(x)|$ in der Halbebene unterhalb einer festen Grenze bleibt, bezeichnen wir mit $\mathfrak{D}^n_{\rightarrow}$ bzw. $\mathfrak{D}^n_{\leftarrow}$.

§ 1.

Behandlung der Differenzengleichung (1).

Satz 1[5]). *Es gehöre $g(x)$ zu $\mathfrak{F}_q$, wo $q < 2\pi$, so hat* (1) *eine und nur eine Lösung aus $\mathfrak{F}_q$. Setzt man*

$$\frac{1}{1+e^z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{T_{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu z^\nu}{\nu!}, \tag{4}$$

so ist diese Lösung

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu}{\nu!}g^{(\nu)}(x). \tag{5}$$

---

[4]) S. Pincherle, Sull' inversione degl' integrali definiti. Mem. Soc. ital. (3) **15** (1907).

[5]) Vgl. hierzu auch H. v. Koch, l. c.

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Satze von Schürer. (1) ist äquivalent der Differentialgleichung

$$(6)\qquad 2f(x)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}=g(x).$$

Hat man allgemein eine Differentialgleichung

$$(7)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu f^{(\nu)}(x)=g(x),$$

und setzt man

$$(8)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu=a(z),\qquad \frac{1}{a(z)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu z^\nu,$$

sei ferner q kleiner als die absolut kleinste Wurzel von $a(z)=0$, so ist, wenn $g(x)$ zu $\mathfrak{F}_q$ gehört,

$$(9)\qquad f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu g^{(\nu)}(x)$$

die einzige Lösung von (7) aus $\mathfrak{F}_q$.

Für die Differenzengleichung

$$(10)\qquad f(x+1)-f(x)=g(x)$$

ist $z=0$ diese absolut kleinste Wurzel, weswegen die (9) entsprechende Lösung in diesem Falle nur bis auf eine willkürliche Konstante bestimmt ist.

Satz 2. *Gehört* $g(x)$ *zu* $\mathfrak{D}_{\rightarrow}^{(0)}$, *so ist für* $\Re(x)>k\geqq c$

$$(11)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}dz\,g(z)\int_0^{\infty}\frac{e^{-u(x-z)}}{e^{-u}+1}\,du=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\beta(x-z)g(z)\,dz$$

die einzige Lösung von (1), *die zu* $\mathfrak{D}_{\rightarrow}^{(0)}$ *gehört. Dabei ist*

$$(12)\qquad \beta(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-ux}}{e^{-u}+1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{x+\nu},$$

$$(13)\qquad \beta(x-z+1)+\beta(x-z)=\frac{1}{x-z}.$$

Wir führen den Beweis des hier unmittelbar verizierbaren Resultates nach der verallgemeinerungsfähigen Methode von Pincherle. Gehören $f(x)$ und $g(x)$ zu $\mathfrak{D}_{\rightarrow}^{(0)}$, so ist (1) äquivalent der Integralgleichung

$$(14)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}f(z)\left(\frac{1}{x+1-z}+\frac{1}{x-z}\right)dz=g(x).$$

Nun ist

$$(15)\qquad \frac{1}{x+1-z}+\frac{1}{x-z}=\int_0^{\infty}e^{-u(x-z)}(e^{-u}+1)\,du\quad \text{für}\quad \Re(x)>\Re(z),$$

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty du\, e^{-ux}\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{uz} g(z)\,dz, \tag{16}$$

also hat man

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty du\, e^{-ux}(e^{-u}+1)\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(z)e^{uz}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty du\, e^{-ux}\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{uz}g(z)\,dz. \tag{17}$$

Daher muß[6])

$$\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(z)e^{uz}dz=\frac{1}{e^{-u}+1}\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{uz}g(z)\,dz \tag{18}$$

oder

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty} dz\, g(z)\int\limits_0^\infty \frac{e^{-u(x-z)}}{e^{-u}+1}\,du \tag{19}$$

sein.

Satz 3. *Gehört $g(x)$ zu $\mathfrak{D}_{\rightarrow}^{(0)}$, so gilt für* (11) *die Entwicklung* (5) *asymptotisch, wenn x parallel der Achse des Reellen in der Halbebene $\Re(x)>c$ nach Unendlich geht.*

Satz 4. *Gehört $g(x)$ zu $\mathfrak{D}_{\rightarrow}^{(n)}$, wo n eine positive Zahl ist, so gibt es eine und nur eine Lösung aus $\mathfrak{D}_{\rightarrow}^{(n)}$ von* (1), *nämlich*

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{c_\nu}{\nu!}g^{(\nu)}(x)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty} dz\, g(z)\int\limits_0^\infty e^{-u(x-z)}\left(\frac{1}{e^{-u}+1}-\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^\nu\frac{c_\nu}{\nu!}u^\nu\right)du.$$

Es gilt daher wie oben (5) *asymptotisch.*

Satz 5. *Für Funktionen $g(x)$ aus $\mathfrak{D}_{\leftarrow}^{(n)}$ gelten analoge Sätze und Darstellungen, nur tritt $-\beta(1-x)$ an die Stelle von $\beta(x)$.*

Sei wieder $\Re(x)>0$. Aus der Gleichung

$$\beta(x-z)=\frac{-\pi}{\sin\pi(x-z)}-\beta(1-x+z) \tag{21}$$

folgt vermittelst des Cauchyschen Integralsatzes zunächst unter den Voraussetzungen des Satzes 2, dann aber allgemein[7])

Satz 6. *Ist $g(x)$ in der Halbebene $\Re(x)>0$ regulär und ist daselbst $|g(x)|<e^{\varkappa|x|}$, wo $\varkappa<\pi$ ist, so ist für $\Re(x)>0$*

$$f(x)=\frac{i}{2}\int\limits_{k_1-i\infty}^{k_1+i\infty} g(x+z)\frac{dz}{\sin\pi z}, \tag{22}$$

---

[6]) Vgl. etwa S. Pincherle, Sur les fonctions déterminantes. Ann. Ec. norm. 125 (1905), S. 28.

[7]) Nörlund, l. c. S. 13f.

wo $-1 < k_1 < 0$. *Diese Lösung ist die einzige von* (1), *welche in einem zur imaginären Achse parallelen Streifen von der Breite* 1 *schwächer unendlich wird wie* $e^{\pm \pi i x}$.

Ebenso erhält man unmittelbar:

Satz 7. *Ist* $g(x)$ *innerhalb eines kleinen Winkels* ϑ, *der die positive reelle Achse einschließt, regulär und ist gleichmäßig in dem Winkel für alle positiven* ε

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) e^{-\varepsilon|x|} = 0, \tag{23}$$

so ist

$$f(x) = \frac{i}{2}\int_C \frac{g(x+z)\,dz}{\sin \pi z} \tag{24}$$

eine Lösung von (1), *wenn* C *aus zwei Radienvektoren innerhalb des Winkels* ϑ *und einem im Sinne des Uhrzeigers durchlaufenen kleinen Kreis um den Nullpunkt besteht.*

Satz 8. *Ist innerhalb des Winkels* ϑ *entsprechend* (3)

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b(x)}{x^2}, \tag{25}$$

so folgt aus (24)

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu g(x+\nu) \tag{26}$$

als einzige Lösung von (1), *welche, wenn* x *längs der reellen Achse nach* $+\infty$ *geht, verschwindet.*

Geht man schließlich von den unendlich vielen linearen Gleichungen

$$f(x+\nu+1) + f(x+\nu) = g(x+\nu) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{27}$$

aus, so erhält man:

Satz 9. *Ist für alle reelle* x

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|g(x+n)|} \leq q < 1, \tag{28}$$

so gibt es nur die eine Lösung (26), *für welche*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f(x+n)|} \leq q \tag{29}$$

ist.

Entsprechende Darstellungen wie in den obigen Sätzen erhält man, wenn man die negative Achse der reellen x statt der positiven auszeichnet.

Nörlund geht seinerseits von (26) aus, indem er $g(x)$ durch $g(x)e^{-\varepsilon x}$ ersetzt und ε nach 0 gehen läßt.

Da unter sehr weitgehenden Voraussetzungen über $g(x)$ für $g(x)e^{-\epsilon x}$ die Bedingungen für die meisten hier gegebenen Darstellungen erfüllt sind, so glaube ich, daß die oben zusammengestellten Sätze geeignet sind, zur Aufhellung der Tatsache beizutragen, daß man durch geeignete Summierung von (26) bzw. der entsprechenden Darstellung für $\Re(x) \leqq 0$ gerade die wichtigsten Lösungen von (1) erhält.

§ 2.

Behandlung der Differenzengleichung (2).

Geht man von (2) zu der Differentialgleichung

$$(1 - x)f(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} = g(x) \tag{30}$$

über, so erhält man entsprechend meinem Ansatz für solche Differentialgleichungen die Hilfsdifferentialgleichung[8])

$$-\frac{d\varphi(z)}{dz} + (e^z - x)\varphi(z) = 1. \tag{31}$$

Im allgemeinen Fall hat man, wie dort gezeigt wurde, eine Lösung der Hilfsdifferentialgleichung anzugeben, welche an der singulären Stelle vom absolut kleinsten Betrag regulär ist. Leider fällt in dem vorliegenden Fall diese singuläre Stelle nach ∞, so daß man es mit einer Ausartung zu tun hat. Immerhin erhält man ohne weiteres durch Integration von (31)

Satz 10. *Gehört $g(x)$ zu $\mathfrak{F}_q$, wo q irgendeine positive Zahl ist, so hat* (2) *eine ganze transzendente Lösung*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu(x)}{\nu!} g^{(\nu)}(x), \tag{32}$$

wenn

$$\varphi(z, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu(x)}{\nu!} z^\nu = e^{e^z} e^{-xz} \int_z^{\infty} e^{-e^{z_1}} e^{xz_1} dz_1 \tag{33}$$

gesetzt wird. Speziell ist

$$c_0(x) = e\int_0^{\infty} e^{-e^{z_1}} e^{xz_1} dz_1 = e\int_0^{\infty} e^{-z_1} z_1^{x-1} dz_1 = eQ(x), \tag{34}$$

wobei[9]) *$Q(x)$ eine ganze transzendente Funktion ist, für welche*

$$Q(x+1) - xQ(x) = e^{-1}. \tag{35}$$

---

[8]) Vgl. Hilb, l. c. 3, S. 8.

[9]) F. Prym, Zur Theorie der Gammafunktion. Journ. für Math. 82, S. 165—172.

Man darf übrigens von $g(x)$ noch etwas weniger verlangen. Darauf und auf die $f(x)$ definierende Eigenschaft, welche an die Stelle dessen tritt, daß auch die bestimmte Funktion zu $\mathfrak{F}_q$ gehört, wie es bei im Endlichen gelegenen singulären Stellen der Hilfsdifferentialgleichung bei geeignetem q der Fall ist, muß ich in einer späteren Arbeit zurückkommen. Daß $f(x)$ (2) befriedigt, kann man durch Einsetzen unschwer verifizieren.

Nimmt man in (33) statt $+\infty$ als Integrationsgrenze $-\infty$, so erhält man

Satz 11. *Gehört $g(x)$ zu $\mathfrak{F}_q$, so hat* (2) *für $\Re(x) > 0$ die Lösung*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma_\nu(x)}{\nu!} g^{(\nu)}(x), \tag{36}$$

wobei jetzt

$$\varphi(z, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\gamma_\nu(x)}{\nu!} z^\nu = -e^{e^z} e^{-xz} \int_{-\infty}^{z} e^{-e^{z_1}} e^{xz_1} dz_1 \tag{37}$$

gesetzt ist. Die Lösung (36) *ist die einzige, für welche bei reellem positiven n*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+n)}{\Gamma(x+n)} = 0 \tag{38}$$

ist. Speziell ist[9])

$$\gamma_0(x) = -e\int_{-\infty}^{0} e^{-e^z} e^{xz} dz = -e\int_0^1 e^{-t} x^{t-1} dz = -eP(x),$$

wobei

$$P(x+1) - xP(x) = -e^{-1}$$

ist.

Man verifiziert wieder leicht, daß (36) der Differenzengleichung (2) genügt, (38) folgt aus der Tatsache[10]), daß für alle x

$$|g^{(m)}(x)| < (q+\varepsilon)^m e^{|x|q}, \tag{39}$$

wenn ε eine beliebig kleine positive Größe und m unabhängig von x groß genug gewählt ist.

Die Methode von Pincherle, die uns Satz 2 lieferte, führt hier in naheliegender Verallgemeinerung vermittelst partieller Integration auf die Hilfsdifferentialgleichung

$$\varphi'(z) - e^{-z}\varphi(z) = -\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{zt} g(t) dt, \tag{40}$$

die, wie auch entsprechend im allgemeinen Falle, in engster Beziehung

---

[10]) Vgl. Hilb, l. c. 3, S. 2.

zu (31) steht, aber jetzt mit der Nebenbedingung $\varphi(0)=0$ zu integrieren ist. Es folgt

Satz 12. *Gehört $g(x)$ zu $\mathfrak{D}^0_{\to}$, so ist*

$$f(x)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} g(z)\,dz\int_0^\infty du\, e^{-uz}e^{-e^{-u}}\int_0^u du_1\, e^{e^{-u_1}}e^{u_1 z}$$

$$(41)\qquad =-\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} g(z)\,dz\int_0^\infty du\, e^{-u(x-z)}e^{e^{-u}}e^{uz}\int_u^\infty du_1\, e^{-u_1 z}e^{-e^{-u_1}}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} g(z)H(x,z)\,dz,\quad (\Re(x)>k),$$

die einzige Lösung von (2) *aus* $\mathfrak{D}^{(0)}_{\to}$, *speziell also die einzige Lösung, für welche bei reellem positiven n*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+n)}{\Gamma(x+n)}=0.$$

Gehört $g(x)$ also auch zu $\mathfrak{F}_q$, so sind die Lösungen (36) *und* (41) *identisch.*

Es ist dabei

$$(43)\quad H(x,z)=-\int_0^\infty du\, e^{-u(x-z)}e^{e^{-u}}e^{uz}\int_u^\infty du_1\, e^{-u_1 z}e^{-e^{-u_1}}\quad \text{für } (\Re(x)>\Re(z)),$$

und nach (37)

$$(44)\qquad -e^{e^{-u}}e^{uz}\int_u^\infty du_1\, e^{-e^{-u_1}}\, e^{-u_1 z}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{\gamma_\nu(z)}{\nu!}u^\nu,$$

ferner

$$(45)\qquad H(x+1,z)-xH(x,z)=\frac{1}{x-z}.$$

Satz 13. *Gehört $g(x)$ zu $\mathfrak{D}^{(n)}_{\to}$, so ist für $\Re(x)>k>c$*

$$(46)\qquad f(x)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\gamma_\nu(x)}{\nu!}g^{(\nu)}(x)$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} g(z)\,dz\int_0^\infty du\, e^{-u(x-z)}\left[-e^{e^{-u}}e^{uz}\int_u^\infty du_1\, e^{-u_1 z}e^{-e^{-u_1}}-\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^\nu\frac{\gamma_\nu(z)}{\nu!}u^\nu\right]$$

die einzige Lösung von (2), *für welche* (42) *gilt. Gehört $g(x)$ auch zu $\mathfrak{F}_q$, so sind* (36) *und* (46) *identisch.*

Satz 14. *Gehört* $g(x)$ *zu* $\mathfrak{D}_{\leftarrow}^{(n)}$, *so ist für* $\Re(x) < k$

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{c_\nu(x)}{\nu!} g^{(\nu)}(x) \tag{47}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} g(z)\,dz \int_0^\infty du\, e^{u(x-z)} \left[e^{e^u} e^{-ux} \int_u^\infty du_1\, e^{u_1 x} e^{-e^{u_1}} - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{c_\nu(x)}{\nu!} u^\nu \right]$$

die einzige für $\Re(x) < k < 0$ *reguläre Lösung von* (2), *die nach Division durch eine geeignete Potenz von* $|x|$ *in einem Streifen von der Breite* 1 *parallel der imaginären Achse unterhalb einer endlichen Schranke bleibt.*

Es ist dabei nach (33)

$$e^{e^u} e^{-ux} \int_u^\infty du_1\, e^{u_1 x} e^{-e^{u_1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu(x)}{\nu!} u^\nu; \tag{48}$$

ferner, wenn

$$\int_0^\infty du\, e^{u(x-z)} e^{e^u} e^{-ux} \int_u^\infty du_1\, e^{u_1 x} e^{-e^{u_1}} = H_1(x, z), \tag{49}$$

$$H_1(x+1, z) - x H_1(x, z) = \frac{1}{z-x}. \tag{50}$$

Satz 15. *Es ist*

$$H(x, z) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{x+\nu-z} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+\nu)}. \tag{51}$$

Satz 16. *Für die durch* (41) *definierte Lösung von* (2) *gilt*

$$f(x) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g(x+\nu)}{x(x+1)\cdots(x+\nu)}. \tag{52}$$

Satz 17. *Selbst wenn* $g(x)$ *nur für positive reelle* x *definiert ist, sofern nur*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left| \frac{g(x+n)}{\Gamma(x+n+1)} \right|} \leq q < 1 \tag{53}$$

ist, hat (2) *die Lösung* (52) *und zwar als einzige, für welche*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+n)}{\Gamma(x+n)} = 0 \tag{54}$$

ist.

Satz 18. *Selbst wenn* $g(x)$ *nur für negative reelle* x *definiert ist, sofern nur*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|g(x-n)\Gamma(n-x)|} \leq q < 1 \tag{55}$$

ist, hat (2) *die Lösung*

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-x)} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} g(x-\nu)\,\Gamma(\nu - x) \quad (x < 0) \tag{56}$$

und zwar als einzige Lösung, für welche

$$\lim_{n\to\infty} f(x-n)\,\Gamma(1+n-x) = 0. \tag{57}$$

Die Sätze (17) und (18) ergeben sich aus der Diskussion der Gleichungssysteme

$$f(x+\nu+1) - (x+\nu) f(x+\nu) = g(x+\nu) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{58}$$

bzw.

$$f(x-\nu) - (x-\nu-1) f(x-\nu-1) = g(x-\nu-1) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{59}$$

(Eingegangen am 23. 7. 1921.)

Über Singularitäten von Potenzreihen und Dirichletschen Reihen am Rande des Konvergenzbereiches[1]).

Von

Otto Szász in Frankfurt a. M.

Die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ besitze einen endlichen Konvergenzradius, der hier ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich Eins angenommen werden kann. Die durch diese Reihe dargestellte Funktion

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$$

hat bekanntlich mindestens eine singuläre Stelle auf dem Einheitskreise; doch ist es i. A. schwierig, aus bestimmten Eigenschaften der Koeffizienten c_ν auf den analytischen Charakter der Funktion in einem gegebenen Punkte des Einheitskreises zu schließen. Wohl der einfachste hierhergehörige Satz lautet:

Sind die c_ν von irgendeiner Stelle $\nu = n$ ab sämtlich reell und $\geqq 0$, so ist $z = 1$ eine singuläre Stelle der Funktion $f(z)$.[2])

---

[1]) Diese Arbeit bildete den Gegenstand eines Vortrages, den ich anläßlich der 86. Naturforscherversammlung im September 1920 in Bad Nauheim hielt. Satz III ist inzwischen, noch in verallgemeinerter Form, von F. Carlson und E. Landau (Neuer Beweis und Verallgemeinerungen des Fabryschen Lückensatzes, Göttinger Nachrichten, vorgelegt am 8. Juli 1921) veröffentlicht worden. Die beiden Herren hatten von meinem Nauheimer Vortrag keine Kenntnis und ihr Beweis ist von dem meinen verschieden.

[2]) Der Satz wurde fast gleichzeitig von Vivanti und Pringsheim gegeben und ein Beweis zuerst von Pringsheim veröffentlicht. Vgl. G. Vivanti, Sulle serie di potenze, Rivista di Matematica **3** (1893), S. 111–114 (dat. vom 29. Mai 1893); insb. S. 112. — A. Pringsheim, Über Funktionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylorsche Reihenentwicklung besitzen, Mathematische Annalen **44** (1894), S. 41–56 (datiert vom Juli 1893); insbes. S. 42. Vgl. auch G. Vivanti, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers deutsch herausgegeben von A. Gutzmer, Leipzig, 1906, S. 399.

Für diesen Satz hat Herr Landau[3]) einen neuen Beweis gegeben und mit dessen Hilfe den Satz auf Dirichletsche Reihen folgendermaßen übertragen:

Es habe die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s}, \quad s = \sigma + ti, \quad 0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \ldots, \quad \lambda_n \to \infty,$$

wo stets[4])

$$a_\nu \geqq 0$$

ist, die im Endlichen gelegene Grenzgerade $\sigma = \alpha$. Dann ist $s = \alpha$ ein singulärer Punkt der für $\sigma > \alpha$ durch die Reihe definierten analytischen Funktion $F(s)$.

Verallgemeinerungen dieser Sätze über Potenzreihen und, teilweise, Dirichletsche Reihen haben die Herren Dienes, Fekete, Beke gegeben. Bekannt sind ferner die tiefgehenden Untersuchungen von Herrn Fabry, insbesondere sein Lückensatz. Im folgenden gewinne ich Ergebnisse, die diese noch genauer anzugebenden Resultate als Spezialfälle enthalten, mit Hilfe ziemlich elementarer Überlegungen unter alleiniger Benutzung des Vivanti-Pringsheimschen bzw. Landauschen Satzes, und zwar sogleich für allgemeine Dirichletsche Reihen.

§ 1.

Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Die Dirichletsche Reihe*

$$(2) \quad D(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{-\lambda_\nu s}, \quad c_\nu = a_\nu + b_\nu i, \quad 0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots, \quad \lambda_\nu \to \infty,$$

besitze die Konvergenzgerade $\sigma = 0$; *offenbar sind die Dirichletschen Reihen*

$$F_1(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s}, \quad F_2(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu e^{-\lambda_\nu s}$$

mindestens für $\sigma > 0$ *konvergent. Die Funktionen* $D(s)$, $F_1(s)$, $F_2(s)$ *sind bekanntlich für* $\sigma > 0$ *regulär; ist mindestens eine der Funktionen* F_1, F_2 *singulär an der Stelle* $s = 0$, *so gilt das gleiche für* $D(s)$.

Ich brauche nur zu zeigen: aus der Regularität von $D(s)$ für $s = 0$ folgt die Regularität von F_1, F_2 an derselben Stelle. Besitzt nämlich $D(s)$ eine konvergente Potenzreihenentwicklung

$$D(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu s^\nu \text{ für } |s| < r, \quad p_\nu = p'_\nu + i p''_\nu,$$

---

[3]) E. Landau, Über einen Satz von Tschebyschef, Math. Annalen 61 (1905), S. 527–550; insbes. S. 534–537. Vgl. auch E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig 1909, Bd. 2, § 213.

[4]) Es ist klar, daß man endlich viele a_ν von der Bedingung ausnehmen darf.

so ist auch $\sum_{\nu=0}^{\infty} p'_\nu s^\nu$ für $|s| < r$ konvergent; ferner ist, zunächst für reelle $s = \sigma$, $0 < \sigma < r$:

$$F_1(s) = \Re D(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p'_\nu s^\nu;$$

daher gilt für alle s im Regularitätsbereich: $F_1(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p'_\nu s^\nu$, woraus die Regularität von F_1 für $s = 0$ folgt. Da nach Voraussetzung auch $i D(s)$ regulär ist, so gilt das gleiche für $F_2(s)$ an der Stelle $s = 0$. Q. e. d.[5]).

Hilfssatz 2. Die Dirichletsche Reihe (2) besitze die Konvergenzgerade $\sigma = 0$;

$$G(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu z^\nu$$

sei eine ganze Funktion vom Minimaltypus der Ordnung eins, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiere ein R_ε, so daß

$$|G(z)| < e^{\varepsilon |z|} \quad \text{für} \quad |z| > R_\varepsilon,$$

während andererseits

$$|G(z)| > e^{-\varepsilon |z|}$$

für gewisse beliebig große $|z|$ ist.

Dann ist die Dirichletsche Reihe

(3) $$H(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu G(\lambda_\nu) e^{-\lambda_\nu s}$$

mindestens für $\sigma > 0$ konvergent und $H(s)$ hat keine andere Singularitäten im Endlichen als $D(s)$.

Der Beweis ist sehr einfach[6]), und folgt aus der Darstellung

$$H(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu g_\nu D^{(\nu)}(s).$$

---

[5]) Hierin ist offenbar der Satz enthalten: Liegen die c_ν von einer Stelle $\nu = n$ ab sämtlich in einem Winkel von der Öffnung $\alpha < \pi$ der komplexen Ebene, mit dem Nullpunkt als Eckpunkt, so ist $s = 0$ eine singuläre Stelle der Funktion $D(s)$. Für Potenzreihen gab diesen Satz Herr P. Dienes (Essai sur les singularités des fonctions analytiques, Journal de Math. pures et appl. (6) 5 (1909), S. 327—418; insb. S. 328 u. S. 338—340), für Dirichletsche Reihen der Gestalt $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu^s}$ Herr M. Fekete (Sur les séries de Dirichlet, Comptes rendus Paris 150 (1910), S. 1033—1036; insb. S. 1034—1035); der daselbst angedeutete Beweis gilt auch für allgemeine Dirichletsche Reihen.

[6]) H. Cramér, Un théorème sur les séries de Dirichlet et son application, Arkiv för matematik, astronomi och fysik, Stockholm, 13 (1918—19), Nr. 22; insb. S. 7.

Hilfssatz 3. Es seien $r_1, r_2, r_3, \ldots$ reelle Zahlen, die den Bedingungen genügen

(A) $$0 < r_1 < r_2 < r_3 < \ldots, \quad \frac{r_\nu}{\nu} \to \infty;$$

dann ist bekanntlich[7]) die ganze Funktion

$$G(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{r_\nu^2}\right)$$

höchstens vom Minimaltypus der Ordnung eins. Ferner sei

(4) $$0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots, \quad \frac{\lambda_\nu}{\log \nu} \to \infty,$$

und es existiere eine positive Zahl h derart, daß

(5) $$r_\nu - r_{\nu-1} > h, \quad |r_\nu - \lambda_\varkappa| > h \qquad (\varkappa, \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist; dann haben die Dirichletschen Reihen (2) und (3) dieselbe Konvergenzabzisse.

Ich zeige zunächst, daß bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ für alle hinreichend großen Werte von $\varkappa$

$$|G(\lambda_\varkappa)|^{-1} < e^{\varepsilon \lambda_\varkappa}$$

ist. Zu diesem Zwecke setze ich[8])

$$G(\lambda_\varkappa) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{r_\nu^2 - \lambda_\varkappa^2}{r_\nu^2} = \gamma_n(\lambda_\varkappa)\,\gamma(\lambda_\varkappa),$$

wobei

$$\gamma_n(\lambda_\varkappa) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{(r_\nu - \lambda_\varkappa)(r_\nu + \lambda_\varkappa)}{r_\nu^2}, \quad \gamma(\lambda_\varkappa) = \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{r_\nu^2 - \lambda_\nu^2}{r_\varkappa^2}$$

ist. Nun ist[9])

$$|\gamma_n(\lambda_\varkappa)| > \prod_{\nu=1}^{n} \frac{|r_\nu - \lambda_\varkappa|}{r_\nu} > \frac{1}{r_n^n} \prod_{\nu=1}^{n} |r_\nu - \lambda_\varkappa|.$$

Bedeutet nun $\varkappa$ eine hinreichend große natürliche Zahl, so existiert dazu stets eine und nur eine natürliche Zahl n, für welche die Beziehung besteht:

(6) $$r_n < 4\,\lambda_\varkappa \leqq r_{n+1},$$

[7]) Vgl. z. B. A. Pringsheim, Über einige funktionentheoretische Anwendungen der Eulerschen Reihentransformation, Sitzungsberichte der Akademie München, mathem.-phys. Klasse 1912, S. 11—92; insb. S. 85 u. S. 87—88.

[8]) Eine ähnliche Überlegung bei G. Faber, Über die Nichtfortsetzbarkeit gewisser Potenzreihen, ebenda 1904, S. 63—74; insb. § 3. — Pringsheim, a. a. O.[7]), S. 88—91.

[9]) Eine leichte Verschärfung dieser Abschätzungen zeigt, daß die Bedingungen (5) durch die allgemeineren ersetzt werden können:

$$r_\nu - r_{\nu-1} > h, \quad |r_\nu - \lambda_\varkappa| > h^\nu \qquad (\varkappa, \nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

und es ist offenbar

$$\lim_{\varkappa\to\infty} n(\varkappa) = \infty.$$

Wegen $\frac{r_\nu}{\nu} \to \infty$ ist daher für alle hinreichend großen $\varkappa$

(7) $$\frac{n}{r_n}\log\frac{2\,e\,r_n}{h\,n} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ferner sei $\varrho = \varrho(\varkappa)$ so bestimmt, daß

$$r_\varrho < \lambda_\varkappa < r_{\varrho+1}.$$

Dann wird

$$\prod_{\nu=1}^{n} |r_\nu - \lambda_\varkappa| = \prod_{\nu=1}^{\varrho}(\lambda_\varkappa - r_\nu)\cdot\prod_{\nu=\varrho+1}^{n}(r_\nu - \lambda_\varkappa),^{10)}$$

und mit Rücksicht auf (5) folgt hieraus

$$\prod_{\nu=1}^{n}|r_\nu - \lambda_\varkappa| > h^n\,\varrho!\,(n-\varrho)!,$$

woraus sich leicht

$$\prod_{\nu=1}^{n}|r_\nu - \lambda_\varkappa| > \left(\frac{h\,n}{2\,e}\right)^n,$$

also

$$|\gamma_n(\lambda_\varkappa)| > \left(\frac{h\,n}{2\,e\,r_n}\right)^n = e^{n\log\frac{h\,n}{2\,e\,r_n}}$$

ergibt. Es ist daher

$$|\gamma_n(\lambda_\varkappa)|^{-1} < e^{n\log\frac{2\,e\,r_n}{h\,n}} = e^{\left(\frac{n}{r_n}\log\frac{2\,e\,r_n}{h\,n}\right)r_n};$$

schließlich wegen (6) und (7)

$$|\gamma_n(\lambda_\varkappa)|^{-1} < e^{4\lambda_\varkappa\left(\frac{n}{r_n}\log\frac{2\,e\,r_n}{h\,n}\right)} < e^{\varepsilon\lambda_\varkappa}.$$

Andererseits hat man

$$|\gamma(\lambda_\varkappa)|^{-1} = \prod_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{r_\nu^2}{r_\nu^2-\lambda_\varkappa^2} = \prod_{\nu=n+1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_\varkappa^2}{r_\nu^2-\lambda_\varkappa^2}\right) = \prod_{\nu=n+1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_\varkappa^2}{r_\nu^2}\,\frac{1}{1-\left(\frac{\lambda_\varkappa}{r_\nu}\right)^2}\right),$$

und da wegen (6)

$$\left(\frac{\lambda_\varkappa}{r_\nu}\right)^2 \leqq \left(\frac{\lambda_\varkappa}{r_{n+1}}\right)^2 \leqq \frac{1}{16}$$

ist, so erhält man

$$|\gamma(\lambda_\varkappa)|^{-1} < \prod_{\nu=n+1}^{\infty}\left(1+\frac{16}{15}\,\frac{\lambda_\varkappa^2}{r_\nu^2}\right).$$

Nun ist für genügend großes n (also auch $\varkappa$):

$$\frac{1}{r_\nu} < \frac{\varepsilon}{2\,\pi\,\nu} \quad \text{für} \quad \nu > n,$$

---

10) Offenbar ist $\varrho \leqq n$; im Falle $\varrho = n$ ist das zweite Produkt $= 1$ zu setzen.

und sodann

$$|\gamma(\lambda_\varkappa)|^{-1} < \prod_{\nu=n+1}^{\infty}\left(1+\frac{16}{15}\,\frac{\varepsilon^2\lambda_\varkappa^2}{4\pi^2\nu^2}\right) < \prod_{\nu=n+1}^{\infty}\left(1+\frac{\varepsilon^2\lambda_\varkappa^2}{\pi^2\nu^2}\right) < \frac{1}{\varepsilon\lambda_\varkappa}\,|\sin i\varepsilon\lambda_\varkappa| < e^{\varepsilon\lambda_\varkappa}.$$

Somit ist schließlich

$$(8) \qquad |G(\lambda_\varkappa)|^{-1} < e^{2\varepsilon\lambda_\varkappa} \quad \text{für alle hinreichend großen } \varkappa.$$

Nun folgt aus $|G(z)| < e^{\varepsilon|z|}$, daß die Reihe (3) mindestens innerhalb der Konvergenzhalbebene der Reihe (2) konvergiert [11]; ferner erhält man aus (8) und (4), daß auch umgekehrt die Reihe (2) mindestens innerhalb der Konvergenzhalbebene der Reihe (3) konvergiert. Es ist nämlich, wenn die Reihe (3) für $\sigma > l$ konvergiert und $\delta > 0$ ist,

$$(9) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{-\lambda_\nu(l+2\delta)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu G(\lambda_\nu)\, e^{-\lambda_\nu(l+\delta)} \cdot \frac{1}{G(\lambda_\nu)}\, e^{-\lambda_\nu\delta},$$

und es existiert eine Zahl $M = M(\delta)$ derart, daß

$$|c_\nu G(\lambda_\nu)|\, e^{-\lambda_\nu(l+\delta)} < M \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Ferner ist wegen (8) und (4)

$$\left|\frac{1}{G(\lambda_\nu)}\right| e^{-\lambda_\nu\delta} < e^{-\lambda_\nu\frac{\delta}{2}} < \frac{1}{\nu^2}$$

für alle hinreichend großen Werte von ν, woraus die Konvergenz der Reihe (9) unmittelbar folgt.

§ 2.

Dirichletsche Reihen mit angebbaren Singularitäten.

Ich beweise nun zunächst den

Satz I. *Die Dirichletsche Reihe mit reellen Koeffizienten*

$$(10) \quad F(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s}, \quad a_1 \geqq 0, \quad 0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots, \quad \frac{\lambda_\nu}{\log\nu} \to \infty$$

besitze eine endliche Konvergenzabszisse α. *Die Koeffizientenfolge* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *besitze unendlich viele Vorzeichenwechsel und zwar für die Indizes* $q_1, q_2, q_3, \ldots$, *so daß also*

$$a_1 \geqq 0, \ldots, a_{q_1} \geqq 0, \; a_{1+q_1} < 0, \ldots, a_{q_2-1} \leqq 0, \; a_{q_2} \leqq 0, \; a_{1+q_2} > 0, \ldots$$

ist. Ferner sei

$$(\text{A}') \qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{\lambda_{q_\nu}}{\nu} = \infty,$$

---

[11]) Vgl. Cramér, a. a. O. [6]), S. 3–4.

und es existiere eine positive Zahl h derart, daß

(5′) $$\lambda_{1+q_\nu} - \lambda_{q_\nu} > h \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Dann ist $s = \alpha$ eine singuläre Stelle der Funktion $F(s)$. [12])

Beim Beweise kann offenbar ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\alpha = 0$ gesetzt werden. Ich bilde nun

$$G(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4z^2}{(\lambda_{q_\nu} + \lambda_{1+q_\nu})^2}\right],$$

und kann hier den Hilfssatz 3 für

$$r_\nu = \frac{1}{2}(\lambda_{q_\nu} + \lambda_{1+q_\nu}) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

anwenden, denn die Bedingungen (A), (4) und (5) sind jetzt wegen (A′), (10) und (5′) erfüllt. Somit besitzt die Dirichletsche Reihe

(11) $$R(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu G(\lambda_\nu) e^{-\lambda_\nu s}$$

gleichfalls die Konvergenzgerade $\sigma = 0$. Ferner hat nach Hilfssatz 2 die Funktion $R(s)$ auf der Geraden $\sigma = 0$ keine anderen singulären Stellen als $F(s)$. Da nun aber

$$\lambda_{q_\nu} < r_\nu < \lambda_{1+q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, so ist

$$G(\lambda_1) > 0, \ldots, G(\lambda_{q_1}) > 0,\ G(\lambda_{1+q_1}) < 0, \ldots, G(\lambda_{q_2}) < 0,\ G(\lambda_{1+q_2}) > 0, \ldots,$$

daher hat die Dirichletsche Reihe (11) lauter positive ($\geqq 0$) Koeffizienten. Nach dem in der Einleitung zitierten Landauschen Satz ist somit $s = 0$ eine singuläre Stelle für die Funktion $R(s)$ und nach dem oben Gesagten auch für $F(s)$. Q. e. d.

Die Bedingung (5′) kann nicht fortgelassen werden, wie das Beispiel zeigt:

$$F(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(e^{-\nu^2 s} - e^{-(\nu^2 + e^{-\nu^2})s}\right);$$

$F(s)$ ist nach Cramér (a. a. O.[9]), S. 12) eine ganze transzendente Funktion, wovon man sich leicht überzeugt. Doch kann an Stelle von (5′) eine allgemeinere Bedingung eingeführt werden. (Vgl. die Fußnote [9])).

---

[12]) Für Potenzreihen (also $\lambda_\nu = \nu$) und die engere Bedingung: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{q_\nu}$ konvergiere, gab den entsprechenden Satz Herr Em. Beke (Vizsgálatok az analytikai függvények elmélete köréből, Math. és Természettud. Értesitő 34 (1916), S. 1–61; insbes. S. 27–30). In der obigen Bezeichnung ist a_{1+q_1} der erste negative Koeffizient a_{1+q_2} der darauffolgende erste positive Koeffizient usw.

Aus I folgt leicht der

Satz II. *Die Dirichletsche Reihe*

$$D(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{-\lambda_\nu s}=\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu+b_\nu i)e^{-\lambda_\nu s}$$

besitze die Konvergenzabszisse α; dann hat mindestens eine der beiden Dirichletschen Reihen

$$F_1(s)=\sum a_\nu e^{-\lambda_\nu s}, \qquad F_2(s)=\sum b_\nu e^{-\lambda_\nu s}$$

gleichfalls die Konvergenzabszisse α. Genügt diese Reihe den Bedingungen des Satzes I, *so ist $s=\alpha$ eine singuläre Stelle der Funktion $D(s)$.*

Dies ergibt sich unmittelbar durch Anwendung des Hilfssatzes 1.

Aus II ergibt sich nun leicht der

Satz III. *Die Dirichletsche Reihe mit komplexen Koeffizienten*

$$D(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{-\lambda_\nu s}, \qquad \lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\dots,$$

wobei

$$\frac{\lambda_\nu}{\nu}\to\infty, \qquad \liminf_{\nu\to\infty}.\,(\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1})>0$$

sei, besitze die endliche Konvergenzabszisse α. Dann ist die Funktion $D(s)$ über die Gerade $\sigma=\alpha$ hinaus nicht fortsetzbar.

Ich brauche nur zu zeigen, daß $s=\alpha+ti$ (t reell) eine singuläre Stelle der Funktion $D(s)$, d. h. $s=\alpha$ eine singuläre Stelle der Funktion

$$D(s+ti)=\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{-\lambda_\nu ti}e^{-\lambda_\nu s}=\sum c'_\nu e^{-\lambda_\nu s}=\sum(a'_\nu+b'_\nu i)\,e^{-\lambda_\nu s}$$

ist. Diese Reihe hat gleichfalls die Konvergenzabszisse α, also auch mindestens eine der Reihen

$$\sum a'_\nu e^{-\lambda_\nu s}, \qquad \sum b'_\nu e^{-\lambda_\nu s};$$

aber diese Reihen genügen den Bedingungen des Satzes I; hieraus in Verbindung mit II folgt sofort der Satz III.

Für ganzzahlige λ_ν reduziert sich III auf einen bekannten Satz von Fabry über Potenzreihen[13]).

---

[13]) E. Fabry, a) Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux, Ann. de l'Éc. Normale (3) 13 (1896), S. 367–399; insbes. S. 381–382; b) Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers, Acta mathematica 22 (1899), S. 65–87; insbes. S. 86. — Vgl. ferner Faber, a. a. O. [8]), Pringsheim, a. a. O. [7]), insbes. § 5. — Für den Spezialfall $\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu\to\infty$ verweisen Carlson und Landau auf die Diss. von Wennberg (Uppsala 1920), die mir nicht zugänglich war.

Die aus I und II für $\lambda_\nu=\nu$ resultierenden Sätze lassen sich auch aus den Fabryschen Resultaten herleiten.

§ 3.

Verallgemeinerung eines Fatouschen Satzes.

Der Satz III gibt Bedingungen, die sich nur auf die Exponentenfolge (λ_ν) beziehen, und die Nichtfortsetzbarkeit der Reihe $\Sigma c_\nu e^{-\lambda_\nu s}$ zur Folge haben. Es ist von Interesse, diesem Satze einen andern an die Seite zu stellen, der kurz besagt, daß unter allgemeinen Bedingungen die Reihe $\Sigma c_\nu e^{-\lambda_\nu s}$ nur durch geeignete Änderung der Vorzeichen der Koeffizienten in eine Dirichletsche Reihe übergeht, die ihre Konvergenzabszisse zur natürlichen Grenze hat. Für Potenzreihen lautet der Satz:

Die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ besitze den Konvergenzradius eins; dann läßt sich eine unendliche Folge $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, wo die ε_ν nur der beiden Werte $+1$ und -1 fähig sind, derart bestimmen, daß die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu c_\nu z^\nu$ den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat.

Diesen Satz hat schon Herr Fatou[14] vermutet, aber nur unter der Bedingung:

$$c_\nu \to 0, \qquad \sum |c_\nu| \text{ divergiert,}$$

mit Hilfe eines wichtigen, von ihm herrührenden Satzes bewiesen. Ohne diese Bedingung gelang der Beweis zuerst Herrn Pólya und dann noch einfacher Hurwitz[15]), durch Anwendung der vorhin berührten Fabryschen Resultate. Ich benutze den Hurwitzschen Gedankengang, um den allgemeineren Satz zu beweisen:

Satz IV. *Es sei*

$$(12) \qquad \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots, \qquad \frac{\lambda_\nu}{\log \nu} \to \infty, \qquad s = \sigma + ti$$

die Dirichletsche Reihe

$$(13) \qquad D(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{-\lambda_\nu s}$$

besitze eine endliche Konvergenzabszisse α. *Sei ferner*

$$(14) \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \quad (\varepsilon_\nu = \pm 1),$$

eine unendliche Zahlenfolge, in der jedes Glied den Wert 1 *oder* -1 *hat; dann hat auch die Dirichletsche Reihe*

$$(13') \qquad D_\varepsilon(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu c_\nu e^{-\lambda_\nu s}$$

---

[14]) P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta math. **30** (1906), S. 335–400; insbes. S. 400.

[15]) A. Hurwitz und G. Pólya, Zwei Beweise eines von Herrn Fatou vermuteten Satzes, Acta math. **40** (1915), S. 179–183.

die Konvergenzabszisse α, und die Funktion $D_\varepsilon(s)$ ist bei geeigneter Wahl der ε_ν über die Gerade $\sigma = \alpha$ hinaus nicht fortsetzbar.

Unter der Bedingung (12) hat bekanntlich[16]) die Reihe (13) keinen Streifen bedingter Konvergenz, also besitzen die Reihen (13) und (13′) dieselbe Konvergenzabszisse (die zugleich Abszisse absoluter Konvergenz ist). Ich gebe hier dafür einen direkten Beweis, der zugleich eine einfache Bestimmung der Zahl α liefert; es gilt nämlich der

Satz V. *Die Konvergenzabszisse α der Dirichletschen Reihe*

$$(13'') \qquad D(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{-\lambda_\nu s}, \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots, \quad \frac{\lambda_\nu}{\log \nu} \to \infty$$

ist durch

$$\alpha = \overline{\lim_{\nu \to \infty}} \frac{\log |c_\nu|}{\lambda_\nu}.$$

bestimmt.

Sei nämlich zunächst α endlich; dann ist für irgendein $\delta > 0$ von einer gewissen Stelle an

$$\frac{\log |c_\nu|}{\lambda_\nu} < \alpha + \frac{\delta}{2} \quad \text{oder} \quad |c_\nu| < e^{\lambda_\nu\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)} \quad \text{und} \quad \lambda_\nu > \frac{4}{\delta} \log \nu,$$

also

$$\sum |c_\nu| e^{-\lambda_\nu(\alpha+\delta)} < \sum e^{-\lambda_\nu \frac{\delta}{2}} < \sum \frac{1}{\nu^2},$$

woraus die (absolute) Konvergenz der Reihe (13) für $\sigma > \alpha$ folgt. Ferner ist unendlich oft

$$\frac{\log |c_\nu|}{\lambda_\nu} > \alpha - \frac{\delta}{2} \quad \text{oder} \quad |c_\nu| > e^{\lambda_\nu\left(\alpha - \frac{\delta}{2}\right)};$$

also

$$|c_\nu| e^{-\lambda_\nu(\alpha-\delta)} > e^{\lambda_\nu \frac{\delta}{2}} > 1,$$

daher divergiert die Reihe (13) für $\sigma < \alpha$.

Ist aber $\alpha = -\infty$, so ist für irgendeine reelle Zahl r von einer gewissen Stelle an

$$|c_\nu| < e^{\lambda_\nu(r-\delta)}, \quad \text{also} \quad \sum |c_\nu| e^{-\lambda_\nu r} < \sum e^{-\lambda_\nu \delta},$$

daher konvergiert die Reihe (13) (sogar absolut) für jedes s.

Ist schließlich $\alpha = +\infty$, so ist für irgendeine positive Zahl p unendlich oft

$$|c_\nu| > e^{\lambda_\nu\left(p - \frac{\delta}{2}\right)}, \quad \text{also} \quad |c_\nu| e^{-\lambda_\nu(p-\delta)} > e^{\lambda_\nu \frac{\delta}{2}} > 1,$$

und die Reihe (13) für jedes s divergent.

---

[16]) Vgl. z. B. E. Landau, a. a. O. [8]), Handbuch usw., S. 759.

Der Satz V ist offenbar eine unmittelbare Verallgemeinerung des Cauchy-Hadamardschen Satzes zur Bestimmung des Konvergenzradius einer Potenzreihe.

Zum Beweise des Satzes IV bilde ich zunächst die Reihe

$$D_\varkappa(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\varkappa_\nu} e^{-s\lambda_{\varkappa_\nu}} \tag{15}$$

in der Weise, daß die Koeffizienten $c_{\varkappa_\nu}$ sämtlich von Null verschieden sind und der Bedingung

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\log|c_{\varkappa_\nu}|}{\lambda_{\varkappa_\nu}} = \alpha$$

genügen, so daß nach V die Reihe (15) die Konvergenzabszisse α hat; zugleich kann ich die Folge $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ so bestimmen, daß

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\lambda_{\varkappa_\nu}}{\nu} = \infty, \quad \underline{\lim}_{\nu\to\infty} (\lambda_{\varkappa_\nu} - \lambda_{\varkappa_{\nu-1}}) > 0 \tag{16}$$

ist; nach Satz III ist dann $\sigma = \alpha$ natürliche Grenze der Funktion $D_\varkappa(s)$. Nun fasse ich die in (15) nicht vorkommenden Glieder der Reihe (13) zu einer Dirichletschen Reihe $P(s)$ zusammen, so daß für $\sigma > \alpha$

$$D(s) = P(s) + D_\varkappa(s)$$

ist. Nun zerlege ich $D_\varkappa(s)$ in eine Summe *unendlicher* Reihen $D_\varkappa(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu(s)$, so daß jedes Glied $c_{\varkappa_\nu} e^{-s\lambda_{\varkappa_\nu}}$ in einer und nur einer der Reihen $Q(s)$ auftritt. Offenbar hat jedes $Q(s)$ die Konvergenzabszisse α, und die Gerade $\sigma = \alpha$ zur natürlichen Grenze. Endlich bilde ich die Reihen

$$D_{\varkappa,\varepsilon}(s) = P(s) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu Q_\nu(s),$$

wobei jedes ε_ν einen der Werte $+1$ oder -1 erhalten darf. Offenbar unterscheidet sich diese Reihe von $D(s)$ nur darin, daß hier gewisse Glieder mit -1 multipliziert sind.

Nun beweise ich, daß unter den Reihen $D_{\varkappa,\varepsilon}(s)$ nur abzählbar viele über die Gerade $\sigma = \alpha$ hinaus fortsetzbar sind, woraus dann folgt, daß die übrigen nicht abzählbar vielen Reihen $D_{\varkappa,\varepsilon}(s)$ die Gerade $\sigma = \alpha$ zur natürlichen Grenze haben. Hat nämlich die Reihe $D_{\varkappa,\varepsilon}(s)$ reguläre Punkte auf der Geraden $\sigma = \alpha$, so sei I_ε das System der regulären Intervalle auf dieser Geraden; das entsprechende System für eine zweite Reihe $D_{\varkappa,\varepsilon'}(s)$ sei $I_{\varepsilon'}$. Diese beiden Systeme können nicht übereinandergreifen, denn dann hätte auch die Reihe

$$D_{\varkappa,\varepsilon}(s) - D_{\varkappa,\varepsilon'}(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\varepsilon_\nu - \varepsilon'_\nu) Q_\nu(s)$$

reguläre Punkte auf der Geraden $\sigma = \alpha$, was zu Satz III in Widerspruch steht. Es gibt aber nur abzählbar viele Systeme von Intervallen ohne gemeinsame Stücke auf einer Geraden, womit unser Satz bewesen ist.

Es ist fraglich, ob der Satz allgemein auch für Exponentenfolgen gilt, die der Bedingung

$$\varlimsup_{\nu \to \infty} \frac{\lambda_\nu}{\log \nu} < \infty$$

genügen. Die obige Überlegung ist z. B. auf die Reihe

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu (\log \nu)^2}, \quad \text{also} \quad \lambda_\nu = \log(\log \nu),$$

nicht ohne weiteres anwendbar, denn für eine Teilfolge $\lambda_{\varkappa_\nu}$, die der Bedingung (16) genügt, wird die zugehörige Teilreihe $\sum \frac{1}{\varkappa_\nu} \frac{1}{(\log \varkappa_\nu)^s}$ in der ganzen Ebene konvergieren.

(Eingegangen am 18. 9. 1921.)

Über einen Lückensatz für Dirichletsche Reihen.

Von

Ludwig Neder in Göttingen.

Es sei im folgenden: λ_n stets wachsend und $\frac{\lambda_n}{n} \to \infty$, ferner 0 die Konvergenzabszisse der Dirichletschen Reihe

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (s = \sigma + it)$$

und $f(s)$ ihre Summe für $\sigma > 0$.

Dann hat bekanntlich Herr Fabry[1]) den Satz bewiesen:

Ist λ_n ganz und $\geqq 0$, die Reihe (1) *also eine gewöhnliche Potenzreihe, so ist $f(s)$ nicht fortsetzbar über die Konvergenzgerade $\sigma = 0$.*

Es erhebt sich die Frage, unter welcher Voraussetzung über die λ_n man bei Verzicht auf deren Ganzzahligkeit jene Behauptung aufrechthalten oder wenigstens die Existenz einer anderen Geraden $\sigma = \sigma_0 (< 0)$ garantieren könne, über welche $f(s)$ nicht fortsetzbar ist. In dieser Richtung haben die Herren Carlson und Landau[2]) kürzlich nachstehendes Ergebnis erhalten:

Es werde $\omega_n = \underset{\nu \geqq n}{\mathrm{Min}} \frac{\lambda_\nu}{\nu}$ gesetzt; wenn es dann ein $k \geqq 0$ gibt, so daß für jedes $\delta > 0$ die Beziehung besteht

$$(2) \qquad \lambda_{n+1} - \lambda_n > e^{-(k+\delta)\omega_n} \quad \text{für} \quad n \geqq n_0(\delta),$$

so kann $f(s)$ auf keinem Wege über die Gerade $\sigma = -k$ fortgesetzt werden.

---

[1]) Wegen Literaturangaben sei auf die nachstehend zitierte Arbeit verwiesen.

[2]) Neuer Beweis und Verallgemeinerungen des Fabryschen Lückensatzes [Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse, 1921, S. 184].

Zu diesem Resultat wird nachfolgend eine Ergänzung gegeben, welche besagt, daß der vorstehende Satz *in seiner Art der bestmögliche* ist; und zwar zeigen wir zweierlei:

A. *Unter der Voraussetzung* (2) *läßt sich bei* $k > 0$ *nicht mehr schließen, als genannter Satz behauptet; vielmehr kann* $f(s)$ *über die ganze Halbebene* $\sigma > -k$ *als eindeutige Funktion fortsetzbar sein.*

B. *Wird* (2) *ersetzt durch die Voraussetzung*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > e^{-k_n e^{\lambda_n}}, \quad wo \quad 0 < k_n \to \infty, \tag{3}$$

so läßt sich über die Existenz singulärer Punkte nichts mehr behaupten; vielmehr kann $f(s)$ *eine ganze Funktion sein.*

Wir wollen also zeigen: Es gibt einen λ-Typus der Art, daß (2) (mit $k > 0$) bzw. (3) gilt, und von diesem Typus eine Dirichletsche Reihe (1), deren Summe $f(s)$ in dem bzw. angegebenen Gebiete regulär ist.

Wir beginnen mit einer Hilfsbetrachtung, der oberen Abschätzung von

$$Q(s) = \sum_{\mu=0}^{M} (-1)^\mu \binom{M}{\mu} e^{-\mu s e^{-qM}},$$

wobei

$$M = 2^{m^2} \ (m = 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{und} \quad q > 0.$$

Nach bekannten Formeln ist,

$$F(x) = e^{(-s e^{-qM}) x}$$

gesetzt,

$$Q(s) = \Delta^M F(0) = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \ldots \int_0^1 dx_M F^{(M)}(x_1 + x_2 + \ldots + x_M).$$

Da nun

$$F^{(M)}(x) = (-s e^{-qM})^M e^{(-s e^{-qM}) x}$$

und $0 \leqq x_1 + x_2 + \ldots + x_M \leqq M$ ist, so ergibt sich für $r > 0$ im Kreise $|s| \leqq r$

$$\left\{ \begin{aligned} |Q(s)| &\leqq (r e^{-qM})^M \cdot (\operatorname{Max} e^z \ \text{ für } \ |z| \leqq r e^{-qM} M \leqq r/q) \\ &\leqq (r e^{-qM})^M \cdot e^{r/q}, \end{aligned} \right. \tag{4}$$

was die gewünschte Abschätzung vorstellt.

Unsere Beispiele lauten nunmehr bzw.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ e^{-4^{m^2} s} \sum_{\mu=0}^{M} (-1)^\mu \binom{M}{\mu} e^{-\mu s e^{-kM}} \right\}, \tag{5}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ e^{-4^{m^2} s} \sum_{\mu=0}^{M} (-1)^\mu \binom{M}{\mu} e^{-\mu s e^{-q_m M}} \right\}, \tag{6}$$

wobei M die bisherige Bedeutung hat, und $k > 0$, sowie

$$q_m = \frac{1}{2} \operatorname*{Min}_{\mu \geqq m} k_\mu, \quad \text{also} \quad 0 < q_m \to \infty$$

ist.

Jede dieser Reihen ist nach Auflösung der Klammern formal eine Dirichletsche Reihe (1). Denn es ist der letzte Exponent der m-ten Klammer

$$(7) \qquad < 4^{m^2} + M = 4^{m^2} + 2^{m^2}, \quad \text{also kleiner als} \quad 4^{(m+1)^2},$$

d. h. als der erste Exponent der nächsten Klammer.

In der m-ten Klammer ist bei jedem $\varepsilon > 0$ für alle großen m der Gliedindex

$$n \leqq (2^{1^2} + 1) + (2^{2^2} + 1) + \ldots + (2^{m^2} + 1) < M(1 + \varepsilon),$$

in beiden Reihen also

$$\frac{\lambda_n}{n} > \frac{4^{m^2}}{M(1+\varepsilon)} = \frac{M}{1+\varepsilon} \to \infty,$$

und daher auch

$$(8) \qquad \omega_n > \frac{M}{1+\varepsilon}.$$

Ferner sind beide Reihen divergent für $\sigma < 0$, konvergent für $\sigma > 0$. Denn im ersten Falle ist jedes Glied absolut genommen $\geqq 1$, während im zweiten Falle die Summe der Beträge aller Glieder in der m-ten Klammer

$$\leqq e^{-4^{m^2}\sigma} 2^M \leqq e^{-4^{m^2}\sigma + 2^{m^2}}, \quad \text{also zuletzt} \quad \leqq e^{-m}$$

ist.

Weiter genügt Reihe (5) der Bedingung (2) und Reihe (6) der Bedingung (3). Denn es ist für jedes λ_n aus der m-ten Klammer (auch das letzte wegen (7))

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq e^{-kM} \quad \text{bzw.} \quad \geqq e^{-q_m M},$$

also nach (8) bei passendem ε für alle großen n: Bei der Reihe (5)

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > e^{-k(1+\varepsilon)\omega_n} = e^{-(k+\delta)\omega_n}$$

gemäß (2), und bei der Reihe (6)

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > e^{-2q_m\omega_n} \geqq e^{-2q_n\omega_n} \geqq e^{-k_n\omega_n}$$

gemäß (3).

Endlich sind die Summen unserer Reihen regulär für $\sigma > -k$ bzw. für alle s. Denn es ist für $r > 0$ und $|s| \leqq r$ nach (4) der Betrag der m-ten Klammer

$$\leqq e^{-4^{m^2}\sigma} r^{2^{m^2}} e^{-k 4^{m^2}} e^{r/k} = O\left(e^{-4^{m^2}(\sigma + k - \gamma)}\right)$$

bei jedem $\gamma > 0$, bzw.

$$\leqq e^{4^{m^2} r} r^{2^{m^2}} e^{-q_m 4^{m^2}} e^{r/q_1} = O\left(e^{-4^{m^2}(q_m - r - 1)}\right).$$

Es ist also Reihe (5) gleichmäßig konvergent in jedem endlichen Teil jeder Halbebene $\sigma > -k + 2\gamma$ ($\gamma > 0$), und Reihe (6) in jedem Kreise $|s| < r$. W. z. b. w.

Göttingen, den 21. 8. 1921.

(Eingegangen am 26. 8. 1921.)

Über eine quasi-periodische Eigenschaft Dirichletscher Reihen mit Anwendung auf die Dirichletschen L-Funktionen.

Von

Harald Bohr in Kopenhagen.

Einleitung.

Es sei

$$f(s) = f(\sigma + it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{1}$$

eine Dirichletsche Reihe mit der Konvergenzabszisse λ, die also für $\sigma > \lambda$ konvergiert, für $\sigma < \lambda$ divergiert. Ferner bezeichne $\Lambda (\geqq \lambda)$ die „gleichmäßige Konvergenzabszisse" der Reihe (1), d. h. die untere Grenze aller derjenigen Zahlen σ_0, für welche (1) in der *ganzen Halbebene* $\sigma > \sigma_0$ (und nicht nur in jedem beschränkten Teil dieser Halbebene) gleichmäßig konvergiert. Die Lage dieser letzteren Abszisse Λ läßt sich bekanntlich[1]), im Gegensatz zu der Lage der Konvergenzabszisse λ, in der einfachsten Weise aus den analytischen Eigenschaften der durch die Reihe dargestellten Funktion $f(s)$ bestimmen, nämlich durch die Gleichung $\Lambda = \Gamma$, wo Γ die untere Grenze aller Abszissen σ_0 bedeutet, für welche $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_0$ regulär und beschränkt bleibt.

In einigen früheren Arbeiten hat der Verfasser auf die wesentliche Rolle hingewiesen, die die Theorie der Diophantischen Approximationen — und vor allem ein berühmter Kroneckerscher Approximationssatz in einer von Weyl[2]) gegebenen Verschärfung — beim Studium der Dirichletschen Reihen spielt. In der vorliegenden kleinen Abhandlung soll ein neuer Beitrag zu diesen Untersuchungen gegeben werden. Mit Hilfe der er-

[1]) H. Bohr, Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen, Journal für die reine und angewandte Mathematik 143, S. 203–211.

[2]) H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Mathematische Annalen 77, S. 313–352.

wähnten Approximationstheorie werde ich nämlich zunächst in § 1 zeigen, daß eine *beliebige* Dirichletsche Reihe (1) einen *quasi-periodischen* Charakter in ihrer gleichmäßigen Konvergenzhalbebene $\sigma > \Lambda$ besitzt, worauf ich in § 2 den wesentlich tieferliegenden Satz beweisen werde, daß diese quasiperiodische Eigenschaft für eine ausgedehnte *spezielle* Klasse von Dirichletschen Reihen auch noch in einem über die gleichmäßige Konvergenzhalbebene hinausreichenden Teil der Konvergenzhalbebene $\sigma > \lambda$ bestehen bleibt. Schließlich werde ich dann in § 3 eine Anwendung auf die (Nicht-Hauptcharakteren entsprechenden) Dirichletschen L-Funktionen angeben.

§ 1.

Wir betrachten zunächst das Verhalten der Reihe (1) in der *gleichmäßigen Konvergenzhalbebene* $\sigma > \Lambda$. Hier kann man sehr leicht beweisen, daß die durch die Reihe dargestellte Funktion $f(s)$ eine *quasiperiodische* ist, d. s. h. daß sie die durch den folgenden Satz ausgedrückte Eigenschaft besitzt:

Satz 1. *Es sei ω ein beliebiges endliches Gebiet, das nebst seiner Begrenzung im Innern der Halbebene $\sigma > \Lambda$ gelegen ist, und es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann gibt es eine (von ω und ε abhängige) Folge von Werten*

$$(2) \qquad \ldots \tau_{-2} < \tau_{-1} < 0 < \tau_1 < \tau_2 \ldots$$

mit

$$(3) \qquad \liminf_{m \to \pm\infty} (\tau_{m+1} - \tau_m) > 0 \quad \textit{und} \quad \limsup_{m \to \pm\infty} \frac{\tau_m}{m} < \infty,$$

derart, daß bei jedem $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ die Ungleichung

$$|f(s + i\tau_m) - f(s)| < \varepsilon$$

für alle s im Gebiete ω besteht.

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir nur die Reihe (1) in zwei Teile zu zerlegen:

$$f(s) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s} = \sum_1^N \frac{a_n}{n^s} + \sum_{N+1}^\infty \frac{a_n}{n^s} = A_N(s) + R_N(s)$$

und den Anfang $A_N(s)$ und den Rest $R_N(s)$ für sich zu betrachten. Da das Gebiet ω im Innern der gleichmäßigen Konvergenzhalbebene $\sigma > \Lambda$ gelegen ist, können wir ein festes N so groß wählen, daß bei *jedem* reellen τ die Ungleichung

$$|R_N(s + i\tau)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

im Gebiete ω besteht; es gilt dann (bei jedem τ) im Gebiete ω die Ungleichung

$$(4)\qquad |f(s+i\tau)-f(s)| < |A_N(s+i\tau)-A_N(s)| + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Nachdem N festgelegt ist, betrachten wir den Anfang $A_N(s)$ und bemerken, daß, damit die Ungleichung

$$(5)\qquad |A_N(s+i\tau)-A_N(s)| = \left|\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^s}(e^{-i\tau\log n}-1)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(für ein festes τ) im Gebiete ω bestehen soll, es aus Stetigkeitsgründen offenbar genügt, daß die N Amplituden

$$-\tau\log n \qquad (n=1,2,\ldots,N)$$

auf der Kreisperipherie, d. h. modulo 2π betrachtet, alle nur „sehr" wenig von 0 abweichen. Nach der Lehre von den Diophantischen Approximationen läßt sich aber bekanntlich eine Folge (2) von τ-Werten mit den Eigenschaften (3) so wählen, daß für jedes Element τ_m dieser Folge der durch die Koordinaten

$$\frac{1}{2\pi}\{-\tau_m\log 1,\ -\tau_m\log 2,\ldots,-\tau_m\log N\}$$

bestimmte Punkt im N-dimensionalen Raume „beliebig" wenig von einem Punkt $(g_1, g_2, \ldots, g_N)$ dieses Raumes mit lauter *ganzzahligen* Koordinaten abweicht. Hiermit ist der Satz 1 bewiesen, denn aus den Ungleichungen (4) und (5) folgt ja die Ungleichung

$$|f(s+i\tau)-f(s)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

§ 2.

Von der Betrachtung der gleichmäßigen Konvergenzhalbebene $\sigma > \Lambda$ wenden wir uns nun zur Betrachtung der Konvergenzhalbebene $\sigma > \lambda$ und fragen, ob die durch die Reihe dargestellte Funktion $f(s)$ auch in dieser Halbebene, oder wenigstens in irgendeiner Halbebene $\sigma > \sigma_0$ mit $\sigma_0 < \Lambda$, quasi-periodisch ist. Es ist hier zunächst klar, daß die in § 1 benutzte einfache Beweismethode versagt, weil ja die Reihe bei keinem $\sigma_0 < \Lambda$ in der ganzen Halbebene $\sigma > \sigma_0$ gleichmäßig konvergiert, und wir daher nicht, wie in § 1, einen belanglosen Rest $R_N(s)$ abschneiden können. Es ist aber nicht nur die Beweismethode, sondern auch der Satz selbst, welcher seine allgemeine Gültigkeit verliert, wenn wir die gleichmäßige Konvergenzgerade $\sigma = \Lambda$ überschreiten. Um dieses einzusehen, brauchen wir nur die Zetareihe mit abwechselndem Vorzeichen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

zu betrachten, die die Konvergenzabszisse $\lambda = 0$ und die gleichmäßige Konvergenzabszisse $\Lambda = 1$ besitzt. Es läßt sich nämlich leicht zeigen, daß die durch diese Reihe dargestellte (ganze transzendente) Funktion $F(s) = \zeta(s)(1 - 2^{1-s})$ für *kein* $\sigma_0 < 1$ in der Halbebene $\sigma > \sigma_0$ quasiperiodisch ist. Wir betrachten hierzu die auf der Geraden $\sigma = 1$ gelegenen *Nullstellen* der Funktion $F(s)$, welche eine äquidistante Punktfolge

$$s_q = 1 + \frac{2\pi i q}{\log 2} \qquad (q = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

bilden, wo aber ein Punkt der Folge (nämlich der $q = 0$ entsprechende Punkt $s = 1$, wo $\zeta(s)$ einen Pol besitzt) ausgefallen ist. Aus dieser Lage der Nullstellen folgt nämlich sofort, daß zu einem beliebigen Gebiete ω, das die Strecke

$$S: \quad \left\{\sigma = 1, \ -\frac{3\pi i}{2\log 2} \leq t \leq \frac{3\pi i}{2\log 2}\right\}$$

im Innern enthält, sogar keine einzige Zahl $\tau > \frac{\pi}{2\log 2}$ existiert, für die die Funktion $G(s) = F(s + i\tau)$ im Gebiete ω, also speziell auf der Strecke S, von der Funktion $F(s)$ selbst um weniger als ε abweicht, wenn nur ε kleiner als das Minimum ε_0 von $|F(s)|$ auf der (nullpunktfreien) Strecke S gewählt wird; in der Tat, es hat ja bei jedem $\tau > \frac{\pi}{2\log 2}$ die Funktion $F(s + i\tau)$ mindestens eine Nullstelle auf der Strecke S.

Es läßt sich aber zeigen, daß die besprochene quasi-periodische Eigenschaft doch für gewisse *allgemeine Klassen* Dirichletscher Reihen in einer über die gleichmäßige Konvergenzhalbebene hinausreichenden Halbebene $\sigma > \sigma_0$ besteht. Wir wollen uns hier auf eine besonders einfache solche Klasse Dirichletscher Reihen beschränken, nämlich auf die Reihen der Form

$$(6) \qquad f(s) = \sum \frac{a_p}{p^s} = \sum a_p e^{-s \log p},$$

wo p nur die *Primzahlen* $2, 3, 5, 7, \ldots$ durchläuft. Wie früher vom Verfasser gezeigt[3]), zeichnen die Reihen (6) sich überhaupt in mehreren Beziehungen — z. B. dadurch, daß sie in ihren gleichmäßigen Konvergenzhalbebenen überall *absolut* konvergieren — unter den allgemeinen Dirichletschen Reihen (1) aus, was damit zusammenhängt, daß die Logarithmen der Primzahlen $2, 3, 5, \ldots$, im Gegensatz zu den Logarithmen der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$, im rationalen Körper *linear unabhängig* sind. Für eine solche Reihe (6) werden wir den folgenden Satz beweisen:

---

[3]) H. Bohr, Lösung des absoluten Konvergenzproblems einer allgemeinen Klasse Dirichletscher Reihen, Acta mathematica 36, S. 197—240.

Satz 2. *Es ist die durch die Reihe dargestellte Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}(\Lambda + \lambda)$ quasi-periodisch.*

Beweis. Wenn eine auf der Ordinatenachse $-\infty < t < \infty$ liegende Punktmenge E die Eigenschaft besitzt, daß bei hinreichend großem $T > 0$ jede der beiden auf den Strecken $0 < t < T$ und $-T < t < 0$ liegenden Teilmengen der Punktmenge E eine Anzahl von Intervallen enthält, deren Gesamtlänge größer als $W \cdot T$ ist, wo W eine positive Konstante bedeutet, wollen wir der Kürze halber den Ausdruck brauchen, daß die *Wahrscheinlichkeit* dafür, daß eine sich auf der Ordinatenachse $-\infty < t < \infty$ bewegende Variable τ der Punktmenge E angehört, größer als W ist. Man sieht sofort, daß man aus einer Punktmenge E, für die eine solche positive Zahl (Wahrscheinlichkeit) W existiert, gewiß eine Folge (2) von Werten τ_m mit den Eigenschaften (3) herausgreifen kann, und es ist daher der Satz 2 bewiesen, wenn es gelingt zu zeigen, daß es zu einem beliebig gegebenen Gebiet ω der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}(\Lambda + \lambda)$ und einem beliebig gegebenen $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl W derart existiert, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die reelle Variable τ der Ungleichung

$$|f(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \tag{7}$$

genügt, größer als W ist. Hierbei ist die Ungleichung (7), wie alle folgenden, so zu verstehen, daß sie für alle s im Gebiete ω gelten soll.

Wir teilen hier die Reihe $\sum \frac{a_p}{p^s}$ in *drei* Teile, einen Anfang, eine Mitte und einen Rest, also

$$f(s) = \sum_{1}^{p_N} + \sum_{p_{N+1}}^{p_Q} + \sum_{p_{Q+1}}^{\infty} = A_N(s) + M_{N,Q}(s) + R_Q(s).$$

Bei einer näheren Untersuchung jedes dieser drei Teile findet man nun durch Überlegungen, die so große Ähnlichkeit mit einigen in einer früheren Abhandlung[4]) angestellten aufweisen, daß es nicht nötig sein wird, hier in Einzelheiten einzugehen, die folgende Resultate:

1. Was zunächst *den Rest* R_Q anbelangt, läßt sich (für jedes hinreichend große Q) eine positive Zahl w_Q so bestimmen, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die reelle Variable τ die Ungleichung

$$|R_Q(s + i\tau)| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{8}$$

befriedrigt, größer als w_Q ist, und für $Q \to \infty$ wird $w_Q \to 1$. Dies Resultat über den Rest R_Q wird — im Gegensatze zu den beiden folgenden über

[4]) H. Bohr, Zur Theorie der Riemann'schen Zetafunktion im kritischen Streifen, Acta mathematica 40, S. 67—100.

den Anfang A_N und die Mitte $M_{N,Q}$ — durch rein funktionentheoretische Überlegungen, d. h. ohne Gebrauch der Theorie der Diophantischen Approximationen, abgeleitet, und es wird dabei in wesentlicher Weise die Voraussetzung benutzt, daß das betrachtete Gebiet ω ganz der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}(\Lambda + \lambda)$ angehört, also nicht über die Gerade $\sigma = \frac{1}{2}(\Lambda + \lambda)$ hinausreicht.

2. Für *den Anfang* A_N gibt es eine positive Zahl u_N, so daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß τ der Bedingung

$$(9) \qquad |A_N(s+i\tau) - A_N(s)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

genügt, größer als u_N ist. Diese Zahl u_N kann aber bei kleinem ε und großem N sehr klein ausfallen.

3. Für *die Mitte* $M_{N,Q}$ gibt es eine positive Zahl $v_{N,Q}$, so daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß τ der Ungleichung

$$(10) \qquad |M_{N,Q}(s+i\tau)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

genügt, größer als $v_{N,Q}$ ist. Hier strebt $v_{N,Q}$ gegen 1 für $N \to \infty$, d. h. es ist $v_{N,Q} > 1 - \delta$, wenn nur $Q > N > N_0 = N_0(\delta)$ ist. Ferner läßt sich zeigen — und dies ist gewissermaßen der springende Punkt der Untersuchung, wo der spezielle Charakter der betrachteten Dirichletschen Reihe (6) sich geltend macht —, daß die in 2. und 3. besprochenen Wahrscheinlichkeiten u_N und $v_{N,Q}$ voneinander *unabhängig* sind in dem Sinne, daß die Wahrscheinlichkeit für das *gleichzeitige* Erfülltsein der *beiden* Ungleichungen (9) und (10) größer ist als das *Produkt* $u_N \cdot v_{N,Q}$.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich nunmehr der Beweis des Satzes 2 in wenigen Worten führen. Wir gehen von der Ungleichung

$$(11) \qquad |f(s+i\tau) - f(s)|$$
$$\leqq |A_N(s+i\tau) - A_N(s)| + |R_N(s)| + |M_{N,Q}(s+i\tau)| + |R_Q(s+i\tau)|$$

aus. Da die Reihe (6) in dem beschränkten Gebiete ω gleichmäßig konvergiert, und da die Zahl $v_{N,Q} \to 1$ für $N \to \infty$, können wir zunächst ein festes N so groß wählen, daß

$$(12) \qquad |R_N(s)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

und

$$v_{N,Q} > \frac{1}{2} \qquad \text{(für alle } Q > N)$$

ist. Nachdem N festgelegt ist, können wir danach, wegen $w_Q \to 1$ für $Q \to \infty$, die Zahl $Q > N$ so groß wählen, daß die Ungleichung

$$w_Q > 1 - \frac{1}{3} u_N$$

erfüllt ist. Für diese beiden Zahlen N und Q gibt es dann eine positive Zahl W, so daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Variable τ *gleichzeitig* den *drei* Ungleichungen (8), (9), (10) genügt, größer als W ist; in der Tat, es hat ja offenbar die Zahl

$$W = \{u_N v_{N,Q} + w_Q\} - 1 > \frac{1}{2} u_N + \left(1 - \frac{1}{8} u_N\right) - 1 > 0$$

diese Eigenschaft. Hiermit ist der Satz 2 bewiesen, denn aus (11) folgt ja sofort, unter Berücksichtigung von (12), daß jede Zahl τ, die die drei Ungleichungen (8), (9), (10) befriedigt, auch die Ungleichung

$$|f(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon$$

erfüllt.

§ 3.

Wie in § 2 erwähnt, gibt es auch *andere* Dirichletsche Reihen als die dort betrachteten vom Typus $\sum \frac{a_p}{p^s}$, für welche die durch die Reihe dargestellte Funktion über die gleichmäßige Konvergenzgerade hinaus quasi-periodisch bleibt. So läßt sich z. B., durch ganze ähnliche Überlegungen wie die in § 2 angestellten, beweisen, *daß eine Dirichletsche Reihe, die eine Produktdarstellung der Form*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{b_p}{p^s}}$$

besitzt, wo p die Primzahlen durchläuft, in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}(\Lambda + \lambda)$ quasi-periodisch ist, wenn nur die Produktdarstellung in dieser Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}(\Lambda + \lambda)$ konvergiert. Zu diesem Typus Dirichletscher Reihen gehört jede der in der Einleitung erwähnten Dirichletschen L-Funktionen,

$$L(s) = \sum \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}},$$

wenn angenommen wird, daß die — der Riemannschen Vermutung über die Nullstellen der Zetafunktion ganz entsprechende — *Vermutung richtig ist, daß $L(s) \neq 0$ ist für $\sigma > \frac{1}{2}$*; es ist nämlich unter dieser Annahme die für $L(s)$ angegebene Produktdarstellung konvergent für $\sigma > \frac{1}{2}(\Lambda + \lambda) = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}$.

Der somit bewiesene Satz, *daß die Funktion $L(s)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ quasi-periodisch ist, wenn $L(s) \neq 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$*, läßt sich aber *umkehren*, d. h. wenn $L(s)$ *nicht* in der ganzen Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ von 0 verschieden ist, dann ist $L(s)$ gewiß auch *nicht* quasi-periodisch für $\sigma > \frac{1}{2}$. Denn nach einem Satz von Landau und mir ist bei jedem $\delta > 0$ die Anzahl $N(T)$

der Nullstellen von $L(s)$ im Gebiete $\sigma > \frac{1}{2} + \delta$, $-T < t < T$, gleich $o(T)$[5]), d. h. es strebt $N(T) : T$ für $T \to \infty$ gegen 0, und dies verträgt sich offenbar nur dann mit einem quasi-periodischen Charakter der Funktion $L(s)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$, wenn es überhaupt *gar keine* Nullstellen von $L(s)$ in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ gibt, also wenn $N(T) = 0$ ist für alle T (und jedes δ), denn schon eine einzige Nullstelle in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ würde ja, wenn $L(s)$ quasi-periodisch wäre, zu „mehr als $o(T)$ Nullstellen" Anlaß geben.

Hiermit ist also bewiesen: *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine (einem Nicht-Hauptcharakter entsprechende) Dirichletsche L-Funktion für $\sigma > \frac{1}{2}$ von 0 verschieden ist, besteht darin, daß $L(s)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ quasi-periodisch ist.*

---

[5]) H. Bohr und E. Landau, Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Paris 22 déc. 1913.

(Eingegangen am 1. 7. 1921.)

Neuer Beweis für die Funktionalgleichung der Dedekindschen Zetafunktion.

Von

Carl Siegel in Göttingen.

Für die Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung seiner Zetafunktion hat Riemann zwei Beweise gegeben. Der eine benutzt den Integralsatz von Cauchy, der andere eine Formel aus der Theorie der Thetafunktionen. In seiner Arbeit „Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper" (Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1917, S. 77—89) ist es Hecke gelungen, den zweiten Riemannschen Ansatz auf den Beweis der Fortsetzbarkeit und der Funktionalgleichung der Dedekindschen Zetafunktion zu übertragen. Ich werde im folgenden zeigen, daß auch die Idee des ersten Beweises von Riemann sich sinngemäß bei der Untersuchung der ζ-Funktion eines Zahlkörpers verwenden läßt. Dies gilt für die allgemeinsten Heckeschen ζ-Funktionen mit Charakteren; ich beschränke mich aber der Einfachheit halber auf die gewöhnliche Dedekindsche ζ-Funktion eines *total reellen* algebraischen Zahlkörpers K.

In § 1 stelle ich eine Funktion von $2n+1$ Veränderlichen[1]) auf, welche für die Theorie des Körpers K noch größere Bedeutung zu haben scheint als die gewöhnlichen Zetafunktionen; insbesondere spielt sie bei Problemen der additiven Theorie der Zahlkörper eine fundamentale Rolle[2]). Zur Untersuchung dieser Funktion wurde ich angeregt durch eine Mitteilung von Herrn F. Bernstein aus dem Sommer 1920; Herr Bernstein zeigte mir damals eine Formel, aus der sich ihre wichtigste Eigenschaft für spezielle Werte der Variablen ableiten läßt.

§ 2 enthält den Beweis der Fortsetzbarkeit und Funktionalgleichung der Dedekindschen ζ-Funktion.

---

[1]) n bedeutet wie üblich den Grad des Körpers.

[2]) Vgl. meine demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinende Arbeit „Additive Theorie der Zahlkörper I". Dort wird nur der Fall $n=2$ behandelt.

§ 1.

Es sei $d > 0$ die Grundzahl von K; $\mathfrak{a}$ sei ein Ideal aus K; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dessen Basis; $w^{(1)}, \ldots, w^{(n)}$ seien n positive Variable; $x_1, \ldots, x_n$ seien n reelle Variable; s sei eine reelle Zahl > 1. Ich setze

$$x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n = \xi.$$

Ist β irgendeine Zahl aus K, so heißt $\beta + \xi$ total positiv (in Zeichen $\succ 0$), wenn die n Zahlen $\beta^{(m)} + \xi^{(m)} = \beta^{(m)} + x_1\alpha_1^{(m)} + \ldots + x_n\alpha_n^{(m)}$ $(m = 1, \ldots, n)$ positiv sind. Ich untersuche die Funktion

$$(1) \qquad F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mathfrak{a}|\mu \succ -\xi} N(\mu + \xi)^{s-1} e^{-2\pi S\{(\mu+\xi)w\}};$$

hierin bedeutet das Zeichen $\mathfrak{a}\,|\,\mu \succ -\xi$, daß μ alle diejenigen Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}$ durchläuft, für welche (bei festen $x_1, \ldots, x_n$) die Zahl $\mu + \xi \succ 0$ ist; $N(\mu + \xi)$ ist eine Abkürzung für $\prod_{m=1}^{n} (\mu^{(m)} + \xi^{(m)})$; $S\{(\mu + \xi)w\}$ bedeutet die Summe $\sum_{m=1}^{n} (\mu^{(m)} + \xi^{(m)})w^{(m)}$. Die Funktion F hat in $x_1, \ldots, x_n$ je die Periode 1. Das allgemeine Glied der Summe besitzt für $s > n + 1$ stetige partielle Ableitungen nach $x_1, \ldots, x_n$ bis zur n-ten Ordnung; ferner ist diese Summe sowie die Summe der Ableitungen gleichmäßig konvergent[3]. Die Funktion F ist also für $s > n + 1$ in eine Fouriersche Reihe

$$(2) \qquad F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{l_1, \ldots, l_n = -\infty}^{+\infty} B_{l_1 \ldots l_n} e^{2\pi i (l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n)}$$

entwickelbar, und es ist

$$B_{l_1 \ldots l_n} = \sum_{\mathfrak{a}|\mu \succ -\xi} \int_0^1 \cdots \int_0^1 N(\mu + \xi)^{s-1} e^{-2\pi \left(S\{(\mu+\xi)w\} + i \sum_{m=1}^{n} l_m x_m\right)} dx_1 \ldots dx_n.$$

Es sei $(\mathsf{A}_k^{(l)})$ die zu $(\alpha_l^{(k)})$ $(k = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, n)$ reziproke Matrix; dann ist

$$x_m = \sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)} \mathsf{A}_m^{(k)} = S(\xi \mathsf{A}_m).$$

Bedeutet $\mathfrak{d}$ das Grundideal von K, so ist nach Dedekind $(\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n)$ eine Basis des Ideals $\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}$. Jede Zahl des Ideals $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ hat eine ganze rationale Spur, also ist

$$e^{-2\pi i \sum_{m=1}^{n} l_m x_m} = e^{-2\pi i S\left(\xi \sum_{m=1}^{n} l_m \mathsf{A}_m\right)} = e^{-2\pi i S\left\{(\mu+\xi) \sum_{m=1}^{n} l_m \mathsf{A}_m\right\}}.$$

---

[3]) Vgl. den Beweis in § 2 meiner unter [2]) zitierten Arbeit.

Setzt man noch

$$\sum_{m=1}^{n} l_m A_m = \lambda, \qquad B_{l_1 \dots l_n} = B_\lambda,$$

$$\varepsilon_\xi = 1 \quad \text{für} \quad \xi > 0, \; = 0 \text{ sonst},$$

so ist

$$B_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_\xi N \xi^{s-1} e^{-2\pi S\{\xi(w+i\lambda)\}} dx_1 \dots dx_n.$$

Als neue Integrationsveränderliche führe ich die Größen $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ ein. Es ist

$$\frac{d(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)})}{d(x_1, \dots, x_n)} = |\alpha_l^{(k)}| = \pm N\mathfrak{a}\sqrt{d},$$

und daher

$$B_\lambda = \frac{1}{N\mathfrak{a}\sqrt{d}} \prod_{m=1}^{n} \int_0^\infty \xi^{(m)\,s-1} e^{-2\pi(w^{(m)}+i\lambda^{(m)})\xi^{(m)}} d\xi^{(m)}$$

$$(3) \qquad = \frac{\Gamma^n(s)}{N\mathfrak{a}\sqrt{d}(2\pi)^{ns} \prod_{m=1}^{n} (w^{(m)} + i\lambda^{(m)})^s}.$$

Aus (1), (2), (3) folgt die Gleichung

$$(4) \qquad \sum_{\mathfrak{a}|\mu > -\xi} N(\mu+\xi)^{s-1} e^{-2\pi S\{(\mu+\xi)w\}} = \frac{\Gamma^n(s)}{N\mathfrak{a}\sqrt{d}(2\pi)^{ns}} \sum_{\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}|\lambda} \frac{e^{2\pi i S(\xi\lambda)}}{N(w+i\lambda)^s};$$

wo λ alle Zahlen des Ideals $\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}$ durchläuft. Unter $(w+i\lambda)^s$ ist der Hauptwert zu verstehen.

Bei der Ableitung dieser Formel wurde $s > n+1$ vorausgesetzt. Ihre beiden Seiten sind aber bei festen $x_1, \dots, x_n$, $w^{(1)}, \dots, w^{(n)}$ gleichmäßig konvergent für alle s aus irgendeinem abgeschlossenen endlichen Gebiet der Halbebene $\Re s > 1$, also dort analytische Funktionen von s. Die Formel (4) gilt also für jedes $s > 1$. Sie wird im folgenden benutzt für $s = 2$, $x_1 = \dots = x_n = 0$:

$$(5) \qquad \sum_{\mathfrak{a}|\mu > 0} N\mu\, e^{-2\pi S(\mu w)} = \frac{1}{N\mathfrak{a}\sqrt{d}(2\pi)^{2n}} \sum_{\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}|\lambda} \frac{1}{N(w+i\lambda)^2}.$$

§ 2.

Der bequemeren Darstellung halber nehme ich an, daß der engere und weitere Äquivalenzbegriff sich in K decken, daß es also zu jeder Kombination $v_1, \dots, v_n$ von n Zahlen ± 1 eine Einheit ε mit sign $\varepsilon^{(m)} = v_m$ $(m = 1, \dots, n)$ gibt. Es sei $\mathfrak{K}$ eine Idealklasse, $\mathfrak{a}$ ein festes Ideal aus der zu $\mathfrak{K}$ inversen Klasse.

Dann ist für $s > 1$

$$N\mathfrak{a}^{-s}\zeta(s;\mathfrak{K}) = \sum_{\mathfrak{a}\,|\,(\alpha)} \frac{1}{N\alpha^s},$$

wo α ein vollständiges System nicht assoziierter total positiver Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}$ durchläuft. Benutze ich die Formel

$$\frac{\Gamma(t)}{a^t} = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-ax}\,dx \qquad (t > 0,\ a > 0)$$

für $t = s + 1$, $a = 2\pi\alpha^{(l)}$ $(l = 1, \ldots, n)$, so wird

$$\Phi(s) = \frac{N\mathfrak{a}^{-s}\Gamma^n(s+1)}{(2\pi)^{n(s+1)}}\zeta(s;\mathfrak{K})$$

$$(6) \qquad = \sum_{\mathfrak{a}\,|\,(\alpha)} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_1^s \ldots x_n^s N\alpha\, e^{-2\pi\sum_{l=1}^{n}\alpha^{(l)}x_l}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Es sei $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ ein System total positiver Grundeinheiten und R deren Regulator. Ich mache die Substitution

$$7) \qquad x_l = \varepsilon_1^{(l)^{y_1}} \ldots \varepsilon_{n-1}^{(l)^{y_{n-1}}} z \qquad (l = 1, \ldots, n)$$

mit der Jacobischen Determinante $\pm nR\frac{x_1 \ldots x_n}{z}$; das ergibt

$$\Phi(s) = \sum_{\mathfrak{a}\,|\,\alpha > 0} nR \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_0^\infty z^{n(s+1)-1} N\alpha\, e^{-2\pi z S\left(\alpha \prod_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k^{y_k}\right)} dy_1 \ldots dy_{n-1}\, dz,$$

wo α *alle* total positiven Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}$ durchläuft.

Ich setze nun

$$\Phi(s) = \Phi_1(s) + \Phi_2(s);$$

hierbei sollen Φ_1 und Φ_2 aus Φ hervorgehen, indem das Intervall 0 bis ∞ der Integrationsvariablen z in die Teile 0 bis 1 und 1 bis ∞ zerlegt wird. Bei Φ_1 darf Summation über α mit Integration vertauscht werden, da der Integrand $\geqq 0$ ist. Auf die unter dem Integralzeichen stehende unendliche Reihe wende ich dann die Formel (5) an mit $w^{(l)} = z\prod_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k^{(l)^{y_k}}$ $(l = 1, \ldots, n)$; es folgt

$$\Phi_1(s) = nR \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_0^1 z^{n(s+1)-1} \frac{1}{N\mathfrak{a}\sqrt{d}\,(2\pi)^{2n}} \sum_{\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\,|\,} \frac{dy_1 \ldots dy_{n-1}\, dz}{N\left(z\prod_{k=1}^{n-1}\varepsilon_k^{y_k} + i\lambda\right)^2},$$

wo λ alle Zahlen des Ideals $\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ durchläuft; oder

$$8) \qquad \Phi_1(s) = \frac{R}{N\mathfrak{a}\sqrt{d}\,(2\pi)^{2n}} \left\{ \frac{1}{s-1} + n\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \cdots \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_0^1 z^{n(s+1)-1} \sum_{\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\,|\,\lambda \neq 0} \frac{dy_1 \ldots dy_{n-1}\, dz}{N\left(z\prod_{k=1}^{n-1}\varepsilon_k^{y_k} + i\lambda\right)^2} \right\}.$$

Hierin ist das Integral über die Reihe mit absolut genommenen Gliedern konvergent, wie leicht zu sehen ist; man darf also Integration mit Summation vertauschen. Ferner ist die Reihe der Integrale gleichmäßig in s konvergent für $\Re s > -1+\delta$ $(\delta > 0)$ und jedes Integral stellt eine in dieser Halbebene reguläre Funktion von s dar. Also wird durch (8) die Funktion $\Phi_1(s)$ in die Halbebene $\Re s > -1$ analytisch fortgesetzt; und nach (8) ist $\Phi_1(s)$ dort regulär bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s=1$ mit dem Residuum $\frac{R}{N\mathfrak{a}\sqrt{d}\,(2\pi)^{2n}}$. Die Funktion $\Phi_2(s)$ ist aber, wie ein Blick auf ihre Definition lehrt, ganz transzendent. Nach (6) ist daher $\zeta(s;\mathfrak{K})$ in die Halbebene $\Re s > -1$ fortsetzbar und hat dort nur einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\frac{R}{\sqrt{d}}$ [4]).

Fortan sei $\Re s < 0$. Dann darf auf $\Phi_2(s)$ dieselbe Umformung angewendet werden wie oben auf $\Phi_1(s)$; und ich bekomme durch Ausführung der zu (7) inversen Substitution für $-1 < \Re s < 0$

$$(9)\qquad \Phi(s) = \frac{1}{N\mathfrak{a}\sqrt{d}\,(2\pi)^{2n}} \sum_{\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\,|\,\lambda}{}' \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_1^s \ldots x_n^s \frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{n}(x_l + i\lambda^{(l)})^2}\, dx_1 \ldots dx_n,$$

wobei λ in Σ' ein vollständiges System solcher von 0 verschiedener Zahlen des Ideals $\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ durchläuft, deren Quotienten keine total positiven Einheiten sind („ein vollständiges System im engeren Sinne nicht assoziierter Zahlen").

Die Ebenen der n komplexen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ schneide ich längs der Halbachsen des positiv Reellen auf und verstehe unter x_l^s $(l=1,\ldots,n)$ den in der aufgeschnittenen x_l- Ebene eindeutigen Zweig $e^{s(\log|x_l|+i\operatorname{arc}x_l)}$ mit $0 \leqq \operatorname{arc} x_l \leqq 2\pi$. Dann folgt aus (9)

$$(10)\quad \Phi(s)(1-e^{2\pi i s})^n = \frac{1}{N\mathfrak{a}\sqrt{d}\,(2\pi)^{2n}} \sum_{\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\,|\,\lambda}{}' \int \cdots \int \prod_{l=1}^{n} \frac{x_l^s}{(x_l+i\lambda^{(l)})^2}\, dx_1 \ldots dx_n,$$

wo jede Integrationsvariable auf dem unteren Ufer des Schnitts von $+\infty$ nach 0 und auf dem oberen Ufer nach $+\infty$ zurückläuft. Wegen $\Re s < 0$ darf ich dann das Schleifenintegral über $\frac{x_l^s}{(x_l+i\lambda^{(l)})^2}$ $(l=1,\ldots,n)$ nach dem Integralsatz von Cauchy ersetzen durch das $2\pi i$-fache des Residuums dieser Funktion im Punkte $-i\lambda^{(l)}$. Das Residuum ist nun

$$s(-i\lambda^{(l)})^{s-1} = \begin{cases} i s e^{\frac{3\pi i}{2}s} |\lambda^{(l)}|^{s-1} & \text{für } \lambda^{(l)} > 0, \\ -i s e^{\frac{\pi i}{2}s} |\lambda^{(l)}|^{s-1} & \text{für } \lambda^{(l)} < 0. \end{cases}$$

[4]) R bedeutet den Regulator der *total positiven* Einheiten.

Sind also von den n zu λ konjugierten Zahlen n_1 positiv, n_2 negativ $(n_1 + n_2 = n)$, so hat das n-fache Schleifenintegral in (10) den Wert

$$(-2\pi)^n s^n e^{n\pi i s} |N\lambda|^{s-1} e^{\frac{\pi i}{2} s (n_1 - n_2)} (-1)^{n_2}.$$

In der Summe auf der rechten Seite von (10) treten genau 2^n zu λ „im weiteren Sinne“ assoziierte Zahlen auf, die sich voneinander durch die Vorzeichenanordnung bei ihren Konjugierten unterscheiden. Diese 2^n Zahlen liefern daher zu dem n-fachen Integral den Beitrag

$$(-2\pi)^n s^n e^{n\pi i s} |N\lambda|^{s-1} (e^{\frac{\pi i}{2} s} - e^{\frac{-\pi i}{2} s})^n.$$

Folglich ist

$$\Phi(s)\left(2\cos\frac{\pi s}{2}\right)^n s^{-n} \sqrt{d}\,(2\pi)^n = \frac{1}{N\mathfrak{a}} \sum_{\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}|(\lambda)} \frac{1}{|N\lambda|^{1-s}} \qquad (\Re s < 0),$$

wo λ ein vollständiges System nicht assoziierter Zahlen des Ideals $\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ durchläuft. Mit (6) ergibt sich, daß $\zeta(s; \mathfrak{K})$ in die ganze Halbebene $\Re s < 0$ fortsetzbar ist und der Funktionalgleichung genügt

$$\left(\frac{2}{(2\pi)^s}\right)^n \cos^n \frac{\pi s}{2} \Gamma^n(s) \zeta(s; \mathfrak{K}) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}|(\lambda)} \frac{1}{\{N\mathfrak{a}(\lambda)\}^{1-s}} = d^{\frac{1}{2}-s} \zeta(1-s; \hat{\mathfrak{K}});$$

dabei ist die Klasse $\hat{\mathfrak{K}}$ so bestimmt, daß ihr Produkt mit der Klasse $\mathfrak{K}$ die Klasse des Grundideals ergibt.

Göttingen, 5. August 1921.

(Eingegangen am 10. 8. 1921.)

Über einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-Funktion äquivalent sind.

Von

Hans Hamburger in Berlin.[1])

Wie an anderer Stelle gezeigt wurde[2]), gilt der Satz:

Ist $f(s)$ gleich einer ganzen Funktion von endlichem Geschlecht dividiert durch ein Polynom, so ist $f(s) =$ konst. $\zeta(s)$, *wenn außerdem*

1. $f(s)$ *für* $\Re(s) > 1$ *durch eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe vom Typus* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *dargestellt wird,*

2. $f(s)$ *der Funktionalgleichung*

$$\text{(A)} \qquad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) f(1-s)$$

genügt.

Dieser Satz bleibt offenbar nicht mehr richtig, wenn man statt 1. nur verlangt, daß $f(s)$ für $\Re(s) > 1$ sich durch eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe des allgemeineren Typus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^s}$ darstellen lasse; denn dann kann man, wie man leicht einsieht, aus der Theorie der L-Reihen

[1]) Diese Note gibt unverändert den Inhalt eines Vortrages wieder, den ich im Hamburger Mathemat. Kränzchen am 5. Okt. 1921 gehalten habe; ihre Resultate habe ich bereits Ostern 1921 einigen befreundeten Mathematikern mitgeteilt. Bei meiner Rückkehr aus Hamburg am 10. Okt. fand ich einen Brief von Herrn C. Siegel (Göttingen vor, der einen neuen Beweis des am Anfang dieser Note zitierten Satzes über die ζ-Funktion enthält. Der Siegelsche Beweis stimmt in wesentlichen Punkten mit dem hier veröffentlichten überein (§§ 1—2), ist aber in einer Hinsicht einfacher (vgl. Fußnote [16])). Ich betone, daß Herr Siegel, dessen Note auch in den Math. Ann. erscheinen wird, von meinen Untersuchungen keine Kenntnis hatte.

[2]) Hans Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion. 1. Mitteilung. Math. Zeitschr. 10 (1921), S. 240–254, im folgenden kurz mit 1. Mtlg. zitiert. Vgl. insbesondere Satz 1, S. 240–241.

unendlich viele Funktionen herleiten, die allen gestellten Bedingungen genügen. Andererseits sind die beiden Typen der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^s}$ bezüglich ihres funktionentheoretischen Verhaltens in nichts voneinander verschieden, so daß man die Spezialisierung $\lambda_n = n$, die mithin für den zitierten Satz über die ζ-Funktion wesentlich ist, als eine Voraussetzung von anderem, etwa mehr arithmetischem Charakter anzusehen hat.

In der vorliegenden Note habe ich mir nun die Aufgabe gestellt, allein aus den allgemeineren funktionentheoretischen Voraussetzungen:

1. $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^s}$, 2. $f(s)$ *genügt der Funktionalgleichung* **(A)**,

einige Folgerungen zu ziehen. Die hier angestellten Untersuchungen führen zu dem Ergebnis, daß sich **(A)** durch andere mit ihr äquivalente bemerkenswerte Relationen **(B)**, **(C)**, **(D)**, **(E)** ersetzen läßt; hierbei werden die Relationen **(A)** bis **(E)** in dem Sinne miteinander äquivalent genannt, daß gleichzeitig mit der einen von ihnen die vier übrigen gelten. Als Nebenresultat ergibt sich ein neuer Beweis des oben zitierten Satzes über die ζ-Funktion (§ 3).

Um das Ziel der folgenden Betrachtungen deutlich zu machen, seien hier die mit **(A)** äquivalenten Relationen angeführt, die man erhält, wenn man in **(A)** für $f(s)$ speziell die Funktion $\zeta(s)$ einsetzt; in diesem Falle lauten die abgeleiteten Relationen:

(B) *die ϑ-Relation*:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \tau} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{\tau}},$$

(C) *die Partialbruchzerlegung der Funktion* $i \cot i\pi z$:

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi n z} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + n^2},$$

(D) *die Fourierentwicklung*:

$$\sum_{n=1}^{m} (y-n) = \frac{y^2 - y}{2} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\cos 2\pi n y - 1), \quad m < y < m+1,$$

(E) *die Poissonsche Summationsformel*[3]):

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{inu} du;$$

---

[3]) Vgl. A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, Leipzig 1903, S. 96; dort finden sich auch genauere Literaturangaben.

(E) gilt für alle Funktionen $\varphi(u)$, die in jedem endlichen Intervall von beschränkter Variation sind und im Unendlichen gewissen Konvergenzbedingungen genügen.

Die Äquivalenz der fünf Beziehungen ist wohl bereits für die speziellen hier in der Einleitung angegebenen Formeln nicht allgemein bekannt. Beispielsweise ist oft die ϑ-Relation (B) aus Formel (E) abgeleitet worden[4]), es ist aber wohl noch nicht bemerkt, daß auch umgekehrt (E) aus (B) folgt.

Den folgenden Betrachtungen, die zu sinngemäßen Verallgemeinerungen der Formeln (B) bis (E) führen, ist statt (A) eine etwas allgemeinere Funktionalgleichung zugrunde gelegt (vgl. die Beziehung (I)), die für manche Untersuchungen von Bedeutung ist. Ferner sind die Beziehungen, deren Äquivalenz im folgenden nachgewiesen wird, mit römischen Ziffern numeriert und durch den Druck besonders kenntlich gemacht. Im § 5 endlich sind die Voraussetzungen, unter denen diese Beziehungen miteinander äquivalent sind, in den Sätzen 1 bis 3 noch einmal zusammenfassend formuliert.

Im übrigen sei bemerkt, daß in der vorliegenden Note — im Interesse einer kurzen und übersichtlichen Darstellung — weniger auf Herausarbeitung einfacher Konvergenzbedingungen Wert gelegt wurde (insbesondere bei den Verallgemeinerungen der Poissonschen Formel), als darauf, mehrere scheinbar verschiedenartige Beziehungen als aus einer gemeinsamen Quelle entspringend aufzuweisen.

§ 1.

a) *$f(s)$ sei eine in der ganzen komplexen Zahlenebene definierte eindeutige analytische Funktion der Veränderlichen $s=\sigma+it$, sie sei ferner im Endlichen überall regulär bis auf die Stelle $s=1$, wo $f(s)$ einen Pol erster Ordnung haben möge; mithin sei $(s-1)\,f(s)$ eine ganze Funktion, und zwar, wie weiter vorausgesetzt werde, von endlichem Geschlechte*[5]).

b) *$f(s)$ lasse sich in der Halbebene $\sigma>1$ durch die absolut konvergente Dirichletsche Reihe*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n^s} \tag{1}$$

darstellen.

---

[4]) Vgl. Krazer, l. c. Fußnote [2]), S. 96–98.

[5]) Auf die etwas weitergehende Voraussetzung **a)** des Satzes 1 der 1. Mtlg., S. 240 — $f(s)$ durfte dort endlich viele Pole haben — wird hier im Interesse der einfacheren Formeln verzichtet.

c) *Es sei*

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{l_n^s} \tag{2}$$

eine zweite für $\sigma > 1$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe und es bestehe zwischen $f(s)$ und $g(s)$ die Funktionalgleichung

$$\boxed{\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) g(1-s)}\,. \tag{I}$$

Um von dieser Beziehung zu einer neuen mit ihr äquivalenten Beziehung überzugehen, die der ϑ-Relation **(B)** entspricht, bilde man das Integral[6])

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_R \pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s)\,\tau^{-\frac{s}{2}}\,ds;$$

hierbei bedeute R einen im positiven Sinne zu durchlaufenden rechteckigen Integrationsweg mit den vier Ecken $\gamma \pm iT$, $1-\gamma \pm iT$, $(\gamma > 1,\ T > 0)$.

Setzt man $2f(0) = -a_0$ und bezeichnet man mit b_0 das Residuum von $f(s)$ für $s = 1$, so wird nach dem Cauchyschen Integralsatz, da die zu integrierende Funktion nur für $s = 0$ und $s = 1$ Pole 1. Ordnung hat,

$$J = -a_0 + \frac{b_0}{\sqrt{\tau}}. \tag{3}$$

In den Punkten $\gamma \pm iT$ ist nun aber nach einer bekannten Abschätzung der Γ-Funktion[7])

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s) = O\left(e^{-\frac{\pi}{4}|T|}\,|T|^{\gamma-\frac{1}{2}}\right) \tag{4}$$

und ebenso wegen (I) in den Punkten $1-\gamma \pm iT$. Mithin gilt mit Rücksicht auf das nach Voraussetzung endliche Geschlecht der ganzen Funktion $(s-1)f(s)$ nach einem oft angewandten funktionentheoretischen Satz von Phragmén-Lindelöf[8]) die Beziehung (4) gleichmäßig auf den beiden Seiten des Rechtecks R, die der Achse der reellen Zahlen parallel sind.

Geht man zur Grenze $T = \infty$ über, so ergibt sich demnach in Verbindung mit (3)

---

[6]) Vgl. Hj. Mellin, Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$. Acta soc. sc. fenn. **24** (1899), S. 39–40.

[7]) Es ist $\lim\limits_{t=\infty} \dfrac{\Gamma(\sigma + it)}{e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\,|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}$. T. J. Stieltjes, Sur le développement de $\log \Gamma(a)$, Journ. de math. pures et appl. (4) **5** (1889), S. 425–445. Vgl. auch Lipschitz, Über die Darstellung gewisser Funktionen durch die Eulersche Summenformel, Journ. für die r. u. angew. Math. **56** (1859), S. 11–26, siehe insbes. S. 20.

[8]) E. Phragmén u. E. Lindelöf, Sur une extension d'un principe classique d'analyse, Acta Math. **31** (1908), S. 381–406, insbes. S. 385.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)f(s)\tau^{-\frac{s}{2}}ds-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\gamma-i\infty}^{1-\gamma+i\infty}=-a_0+\frac{b_0}{\sqrt{\tau}}$$

oder wegen (I)

$$(5)\quad a_0+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)f(s)\tau^{-\frac{s}{2}}ds=\frac{b_0}{\sqrt{\tau}}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\gamma-i\infty}^{1+\gamma+i\infty}\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)g(1-s)\tau^{-\frac{s}{2}}ds$$

$$=\frac{b_0}{\sqrt{\tau}}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)g(s)\tau^{-\frac{1-s}{2}}ds,$$

nachdem man noch auf der rechten Seite von (5) die Integrationsveränderliche $1-s$ durch s ersetzt hat. Substituiert man für $f(s)$ bzw. $g(s)$ die für $\sigma=\gamma$ absolut konvergenten Dirichletschen Reihen (1) bzw. (2), so kann man wegen der absoluten Konvergenz Summation und Integration vertauschen und erhält aus (5)

$$a_0+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)(\lambda_n^2\pi\tau)^{-\frac{s}{2}}ds=\frac{b_0}{\sqrt{\tau}}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\sqrt{\tau}}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{l_n^2\pi}{\tau}\right)^{-\frac{s}{2}}ds.$$

Schließlich ergibt sich, wenn man unter Benutzung einer Formel von Mellin[9]) die Integration ausführt,

$$a_0+2\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\pi\lambda_n^2\tau}=\frac{b_0}{\sqrt{\tau}}+\frac{2}{\sqrt{\tau}}\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-\frac{\pi l_n^2}{\tau}}$$

oder bequemer geschrieben, indem man außerdem für die Reihen die Bezeichnung $\vartheta(\tau)$ einführt,

$$\text{(II)}\qquad \boxed{\vartheta(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{-\pi\lambda_n^2\tau}=\frac{1}{\sqrt{\tau}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n e^{-\frac{\pi l_n^2}{\tau}}},$$

wobei

$$(6)\qquad a_{-n}=a_n,\quad b_{-n}=b_n,\quad \lambda_0=l_0=0,\quad \lambda_{-n}=-\lambda_n,\quad l_{-n}=-l_n$$

gesetzt ist.

Andererseits folgt auch umgekehrt (I) ebenso aus (II), wie Riemann die Funktionalgleichung der ζ-Funktion aus der Jacobischen ϑ-Formel abgeleitet hat[10]), wofern nur die Dirichletschen Reihen (1) und (2) für $f(s)$ und $g(s)$ beide eine absolute Konvergenzhalbebene besitzen.

---

[9]) Hj. Mellin, Abriß einer einheitlichen Theorie der Gamma- und hypergeometrischen Funktionen. Math. Ann. 68 (1910), S. 305–337, vgl. insbes. S. 315–316 und S. 318–319.

[10]) B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe. Gesammelte Werke, herausgegeben von H. Weber, 2. Aufl. Leipzig 1892, S. 145–153, siehe insbes. S. 146–147.

§ 2.

Man bilde nunmehr den Ausdruck

$$F(z) = z\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}}\,\vartheta\left(\frac{1}{\tau}\right) e^{-\pi z^2 \tau}\,d\tau. \tag{7}$$

Man überzeugt sich leicht, daß, wenn man für $\vartheta\left(\frac{1}{\tau}\right)$ erst die eine, dann die andere der beiden Reihen (II) in das Integral (7) einsetzt, sich beide Male für $\Re(z^2) > 0$ Integration und Summation vertauschen lassen[11]), und man erhält, indem man bei der gliedweisen Integration der linken Seite von (II) die Integralformel

$$\int_0^\infty e^{-\frac{a^2}{\tau} - b^2\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = \frac{2}{b}\int_0^\infty e^{-\frac{a^2 b^2}{u^2} - u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{b}\,e^{-2ab}$$

benutzt[12]),

$$\boxed{F(z) = a_0 + 2\sum_{n=1}^\infty a_n e^{-2\pi l_n z} = \frac{b_0}{\pi z} + \frac{2z}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{z^2 + l_n^2}}, \tag{III}$$

wo die Dirichletschen Reihen linker Hand für jeden Wert von z mit positivem reellem Teil absolut konvergieren.

Setzt man

$$G(z) = z\int_0^\infty \vartheta(\tau)\,e^{-\pi z^2\tau}\,d\tau,$$

so erhält man die entsprechende Relation

$$\boxed{G(z) = b_0 + 2\sum_{n=1}^\infty b_n e^{-2\pi l_n z} = \frac{a_0}{\pi z} + \frac{2z}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{z^2 + l_n^2}}. \tag{III'}$$

Umgekehrt kann man aus (III) die Funktionalgleichung (I) ableiten,

---

[11]) Der genaue Wortlaut des Satzes, aus dem sich hier die Vertauschbarkeit von Summation und Integration folgern läßt, lautet: Ist $\sum_{\nu=1}^\infty u_\nu(x)$ eine für jeden positiven Wert von x absolut und gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen und konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=1}^\infty \int_0^\infty |u_\nu(x)|\,|\varphi(x)|\,dx$, so ist

$$\int_0^\infty \sum_{\nu=1}^\infty u_\nu(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^\infty \int_0^\infty u_\nu(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Wegen des Beweises dieses Satzes vgl. beispielsweise H. Hamburger, Beiträge zur Konvergenztheorie der Stieltjesschen Kettenbrüche, Math. Zeitschr. 4 (1919), Hilfssatz 2, S. 195–196.

[12]) Vgl. z. B. C. Jordan, Cours d'analyse (2. Aufl. 1894) II, S. 165–167.

indem man ebenso wie Riemann bei seinem ersten Beweis der Funktionalgleichung[13]) das Schleifenintegral

$$\int_L (-z)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2\pi\lambda_n z}\, dz$$

untersucht, unter L einen schleifenförmigen Integrationsweg verstanden, der sich längs der Achse der positiven reellen Zahlen vom unendlich fernen Punkte her dem Nullpunkte nähert, diesen im positiven Sinne umkreist und endlich längs der Achse der positiven reellen Zahlen zum unendlich fernen Punkt zurückkehrt.

Endlich ergibt sich auch (II) aus (III), wie man erkennt, wenn man den Landsbergschen Beweis[14]) der Jacobischen ϑ-Relation nachbildet.

§ 3.

Aus (III) folgt durch einfache Integration

$$(8)\qquad \frac{b_0}{\pi}\log z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\pi}\log(z^2 + l_n^2) = C + a_0 z - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi\lambda_n} e^{-2\pi\lambda_n z};$$

hierbei muß die Integrationskonstante C reell sein, wenn, wie übrigens nur in diesem Paragraphen vorausgesetzt werde, alle übrigen Größen auf beiden Seiten reell sind.

Nähert man sich mit z der Achse der imaginären Zahlen, d. h. geht man zur Grenze $x = 0$ ($z = x + iy$ gesetzt) über, so ist der imaginäre Teil des Ausdrucks links $i\left(\frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} b_n\right)$, wo der Index m durch die Relation $l_m < y < l_{m+1}$ bestimmt ist. Integriert man diesen Ausdruck noch einmal von 0 bis y, so erhält man nach Division durch i

$$(9)\qquad \frac{b_0}{2}y + \sum_{n=1}^{m} b_n(y - l_n), \qquad l_m < y < l_{m+1}.$$

Integriert man andererseits den imaginären Teil des Ausdrucks rechter Hand von (8) von 0 bis y und geht zur Grenze $x = 0$ über, so ergibt sich, indem man endlich diesen Ausdruck dem Ausdruck (9) gleichsetzt,

$$(\mathrm{IV})\qquad \boxed{\sum_{n=1}^{m} b_n(y - l_n) = \frac{a_0 y^2 - b_0 y}{2} - \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda_n^2}(\cos 2\pi\lambda_n y - 1),\ l_m < y < l_{m+1}.}$$

[13]) l. c. Fußnote [10]), S. 146.

[14]) G. Landsberg, Zur Theorie der Gaußschen Summen und der linearen Transformationen der ϑ-Funktionen. Journ. f. reine u. angew. Math. 111 (1893), S. 234–253, vgl. insbes S. 235–238.

Spezialisiert man die Dirichletschen Reihen (1) und (2), indem man $\lambda_n = l_n = n$ setzt, so läßt sich in wenigen Zeilen zeigen, daß (IV) nur möglich ist, wenn alle b_n und a_n gleich derselben Konstanten b sind[15]). Damit ist dann Satz 1 der 1. Mtlg., der am Anfang dieser Note zitiert ist, von neuem bewiesen[16]).

Umgekehrt läßt sich, wie auch in der 1. Mtlg. gezeigt wird[17]), aus (IV) die Funktionalgleichung (I) herleiten.

Notwendige und hinreichende Bedingungen für das Bestehen von (IV), wenn nur die $\lambda_n = n$, aber die l_n beliebige positive Zahlen sind, sind in einer zweiten Mitteilung angegeben, die in der Mathematischen Zeitschrift erscheinen wird.

§ 4.

Es sei $\Phi(z)$ eine in einem Streifen $-\alpha < x < \beta$ $(\alpha, \beta > 0)$ reguläre analytische Funktion mit den beiden Eigenschaften:

1. *es existiere eine positive Zahl γ $(\gamma < \alpha, \gamma < \beta)$, derart, daß die beiden Integrale*

$$(10) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\gamma + iy)|\, dy, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(-\gamma + iy)|\, dy$$

konvergent sind;

2. *es mögen sich zwei Folgen positiver Zahlen $y_1, y_2, \ldots \to \infty$ und $y_1', y_2', \ldots \to \infty$ bestimmen lassen, derart, daß, unter $F(z)$ und $G(z)$ die Funktionen aus* (III) *und* (III') *verstanden,*

$$(11) \qquad \lim_{\nu=\infty} \Phi(x + iy_\nu) = 0, \qquad \lim_{\nu=\infty} \Phi(x - iy_\nu') = 0,$$

$$(12) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\nu=\infty} \Phi(x+iy_\nu) F(x+iy_\nu) = 0, & \lim\limits_{\nu=\infty} \Phi(x-iy_\nu') F(x-iy_\nu') = 0, \\ \lim\limits_{\nu=\infty} \Phi(x+iy_\nu) G(x+iy_\nu) = 0, & \lim\limits_{\nu=\infty} \Phi(x-iy_\nu') G(x-iy_\nu') = 0, \end{cases}$$

und zwar gleichmäßig in x, wenn x dem Intervall $-\gamma \leqq x \leqq \gamma$ angehört[18]).

[15]) Vgl. Fußnote [2]), 1. Mtlg., S. 252–253.

[16]) Der in Fußnote [1]) zitierte Siegelsche Beweis folgert $a_n = b_n = b$ schon aus (III), ohne erst (IV) zu bilden.

[17]) 1. Mtlg., § 4, S. 253–254. — Ich möchte nicht unterlassen, an dieser Stelle darauf hinzuweisen, daß Herr Tschakaloff in Sofia, wie er mir gütigst brieflich mitgeteilt hat, in einer Abhandlung: Analytische Eigenschaften der Riemannschen Funktion $\zeta(z)$, die in bulgarischer Sprache (1914) in Sofia als selbständige Druckschrift erschienen ist, einen Beweis der Riemannschen Funktionalgleichung veröffentlicht hat, der in wesentlichen Punkten mit dem zitierten Beweise des § 4 der 1. Mtlg. übereinstimmt.

[18]) Die scheinbar so unhandliche Bedingung (12) läßt sich in speziellen Fällen wesentlich vereinfachen, da sich dann oft eine Folge von Zahlen y_ν konstruieren läßt, wo $F(x+iy_\nu)$ beschränkt bleibt oder nur wie $\log^2 y_\nu$ unendlich wird. Vgl. die Fußnote [22]) am Schluß.

Nunmehr bilde man die Integrale

$$(13)\qquad \mathfrak{J} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} G(z)\cdot\Phi(z)\,dz - \int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} G(z)\,\Phi(z)\,dz\right).$$

Da sich wegen der Voraussetzung (12) das Integral $\mathfrak{J}$ als Integral über den Rand des Streifens $-\gamma \leqq x \leqq \gamma$ auffassen läßt, so ist nach dem Cauchyschen Integralsatz $\mathfrak{J}$ gleich der Summe der in diesem Streifen enthaltenen Residuen, mithin wegen (III′)

$$(14)\qquad \mathfrak{J} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,\Phi(i\lambda_n),$$

wobei die a_n und λ_n für negative n durch die Formeln (6) bestimmt sind.

Wegen (III′) ist $G(z) = G(-z)$, es läßt sich mithin (13) auch in der Form

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} G(z)\,(\Phi(z)+\Phi(-z))\,dz$$

schreiben. Setzt man für $G(z)$ die für $\gamma + iy$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe linker Hand von (III′) ein, so läßt sich wegen ihrer absoluten Konvergenz und der der Integrale (10) die Reihenfolge von Summation und Integration miteinander vertauschen, mithin wird

$$(15)\quad \mathfrak{J} = \frac{1}{2\pi i}\left(b_0\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}(\Phi(z)+\Phi(-z))\,dz + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-2\pi l_n z}(\Phi(z)+\Phi(-z))\,dz\right).$$

Da aber wegen (11) jedes einzelne der Integrale von (15) längs der Geraden $\Re(z) = \gamma$ gleich dem Integral längs der Achse der imaginären Zahlen ist, so ergibt sich, indem man schließlich noch den Wert der Reihe (14) dem Ausdruck (15) für $\mathfrak{J}$ gleichsetzt,

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,\Phi(i\lambda_n) = \frac{b_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\Phi(iy)+\Phi(-iy))\,dy$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi l_n iy}(\Phi(iy)+\Phi(-iy))\,dy,$$

$$(\mathrm{V})\qquad \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,\Phi(i\lambda_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi l_n iy}\,\Phi(iy)\,dy.}$$

Entsprechend erhält man, wenn man in das Integral (13) $F(z)$ statt $G(z)$ einsetzt,

$$(\mathrm{V}') \qquad \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \Phi(i l_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\lambda_n i y}\,\Phi(iy)\,dy.}$$

Umgekehrt läßt sich aus (V) die ϑ-Relation (II) folgern, indem man $\Phi(z) = e^{\tau z^2}$ setzt [19]).

Ist eine im Intervall $-\infty < u < \infty$ reelle, nicht analytische Funktion $\varphi(u)$ gegeben, die in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung ist und für die das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(u)|\,du$ konvergiert, so läßt sich für $\varphi(u)$ eine (V) analoge Summationsformel beweisen, wenn außerdem die Funktion

$$(16) \qquad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\, e^{zu}\, du$$

in einem Streifen $-\alpha < x < \beta$ $(\alpha, \beta > 0)$ regulär analytisch ist und den Voraussetzungen **1.** und **2.** genügt [20]).

Denn setzt man in (V′) für $\Phi(z)$ die Funktion (16) ein, so erhält man

$$({}^*\mathrm{V}) \qquad \boxed{2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varphi(2\pi\lambda_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i l_n u}\,\varphi(u)\,du,}$$

da nach dem Fourierschen Integraltheorem

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(u-2\pi\lambda_n)iy}\,\varphi(u)\,du\right)dy = \varphi(2\pi\lambda_n)$$

ist [21]).

---

[19]) l. c. Fußnote [4]).

[20]) Ist $\varphi(u)$ zweimal stetig differentiierbar und ist $\lim_{u=\pm\infty} \varphi(u) = 0$, $\lim_{u=\pm\infty} \varphi'(u) = 0$, so ergibt die partielle Integration von (16)

$$\Phi(z) = \frac{1}{z^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi''(u)\, e^{zu}\, du\,.$$

Konvergiert außerdem noch $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi'' u|\, e^{\gamma |u|}\, du$, so sind die Voraussetzungen (10) und (11) gewiß erfüllt. Vgl. auch Fußnote [18]).

[21]) Vgl. Jordan, l. c. Fußnote [12]), II. S. 233–235. Die Jordansche Bedingung: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(u)|\,du$ konvergent, ist hier nach Voraussetzung erfüllt.

Entsprechend leitet man aus (V) die Beziehung her:

$$(^*\mathrm{V}') \qquad \boxed{2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \varphi(2\pi l_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) e^{i\lambda_n u}\, du.}$$

§ 5.

Unsere bisher gefundenen Ergebnisse können wir in den folgenden Sätzen zusammenfassen:

Satz 1. *Unter den in* a), b), c) *gemachten Voraussetzungen für die Funktionen* $f(s)$ *und* $g(s)$ *bestehen auch die Beziehungen* (II), (III), (III′), (IV), (V), (V′), (*V), (*V′).

Die Äquivalenz aller Beziehungen besagt:

Satz 2. *Sind vier Folgen von Zahlen*

$$a_0, a_1, \ldots, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \to \infty,$$
$$b_0, b_1, \ldots, \quad 0 < l_1 < l_2 < \ldots \to \infty$$

vorgelegt, derart, daß eine einzige der acht Beziehungen (II) *bis* (*V′) *erfüllt ist und die Reihen* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\lambda_n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{l_n^2}$ *beide konvergent sind, so gelten alle übrigen der acht Beziehungen, außerdem sind die durch die Reihen* (1) *und* (2) *in der Halbebene* $\sigma \geqq 2$ *definierten Funktionen über die ganze Ebene fortsetzbar und endlich besteht zwischen ihnen die Funktionalgleichung* (I).

Durch genaue Prüfung der bei den einzelnen Übergängen von einer Relation zur andern benutzten Voraussetzungen ergibt sich auch noch

Satz 3. *Sind die Reihen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{b_n}{l_n^2}\right|, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, e^{-2\pi\lambda_n x} \qquad (x \geqq \alpha > 0)$$

konvergent, während die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^2}$ *keine Konvergenzhalbebene besitzt, so sind immer noch die Beziehungen* (II), (III), (V′), (*V) *miteinander äquivalent* (*d. h. wenn eine Relation gilt, gelten auch die drei andern*), *und zwar auch dann noch, wenn die* l_n *keine positiven, sondern beliebige komplexe Zahlen sind, wofern nur die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{b_n}{l_n^2}\right|$ *konvergiert und die Gerade* $x = \gamma$ *der Voraussetzungen* 1. *und* 2. *des* § 4 *im Innern der absoluten Konvergenzhalbebene von* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2\pi\lambda_n z}$ *gelegen ist.*

§ 6.

Stellt man ähnliche Überlegungen an der allgemeinen Epsteinschen ζ-Funktion[22]) an, so erhält man für (II) die bekannte Relation zwischen ϑ-Funktionen mehrerer Veränderlichen. Weiter ergibt sich, wenn man die ϑ-Formel der Transformation (7) unterwirft, an Stelle von (III) die bemerkenswerte Relation

$$F(z) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \sum_{\mu=1}^{p} m_\mu h_\mu} e^{-2\pi z \sqrt{\varphi((m+g))}}$$

$$= \frac{\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\pi \sqrt{\Delta}} e^{-2\pi i \sum_{\mu=1}^{p} g_\mu h_\mu} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{\infty} z \frac{e^{-2\pi i \sum_{\mu=1}^{p} m_\mu g_\mu}}{z^2 + \Phi((h+m))}.$$

Hierbei bedeutet $\varphi((m+g)) = \varphi(m_1+g_1, m_2+g_2, \ldots, m_p+g_p)$ eine positiv definite quadratische Form von p Veränderlichen, Δ ihre Determinante und Φ die zu φ reziproke Form. Diese Formel tritt in einigen neueren zahlentheoretischen Untersuchungen von Hardy und Hecke auf.

Setzt man

$$F(z) = \frac{1}{2} \log k - \frac{\zeta'}{\zeta}\left(z + \frac{1}{2}\right) + \frac{L'}{L}\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

so läßt sich auf diese Funktion der Satz 3 anwenden, wobei $L(z)$ eine L-Reihe bezeichnet, deren Koeffizienten eigentliche reelle Charaktere modulo k mit der Nebenbedingung $\chi(k-1) = 1$ sind. Denn wegen $F(z) = -F(-z)$ besitzt $F(z)$ außer der Darstellung durch eine Dirichletsche Reihe eine Partialbruchzerlegung, derart, daß die Relation (III) erfüllt ist. In diesem Falle erscheinen die Beziehungen (V′) und (*V) als gemeinsame Quelle von Formeln, die Primzahlsummen durch solche Reihen darstellen, welche die nichtreellen Nullstellen der ζ-Funktion enthalten[23]).

19. Oktober 1921.

---

[22]) P. Epstein, Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen. Math. Ann. **56** (1903), S. 615–644; vgl. insbes. S. 623–627.

[23]) Die Voraussetzung 2. für $\Phi(z)$ vereinfacht sich hier dadurch, daß sich eine Folge von positiven Zahlen y_ν konstruieren läßt, für die $\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(x \pm i y_\nu)\right| \leq C \log^2 y_\nu$, $\left|\frac{L'}{L}(x \pm i y_\nu)\right| \leq C' \log^2 y_\nu$ ist. Vgl. etwa E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig 1909, I. S. 341–342 und S. 521.

(Eingegangen am 21. 10. 1921.

Über die Verteilung der Null- und Einsstellen analytischer Funktionen.

Von

Ludwig Bieberbach in Berlin.

---

1. Ich werde in dieser Arbeit die folgenden drei Sätze beweisen:

Satz I. $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$ *sei im Kreise* $|z| < R$ *regulär und besitze in demselben nicht mehr als* n *Nullstellen und nicht mehr als* m *Einsstellen. Es sei* $n \leqq m$. *Es seien* k_i *irgendwelche* n *reelle positive Zahlen, und es seien die* $n+1$ *ersten Koeffizienten* a_i *den Bedingungen*

$$|a_i| \leqq k_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

unterworfen. Endlich sei ϑ *irgendeine der Bedingung* $0 < \vartheta < 1$ *genügende Zahl. Dann gibt es eine nur von den* k_i *sowie von* ϑ *und* R *abhängende Schranke* $S_{n,m}(k_0, k_1, \ldots, k_n, \vartheta, R)$, *so daß für* $|z| \leqq \vartheta R$ *die Abschätzung*

$$|f(z)| \leqq S_{n,m}(k_0, k_1, \ldots, k_n, \vartheta, R)$$

gilt.

Man erkennt in diesem Satze eine Verallgemeinerung eines berühmten von Schottky entdeckten Satzes in einer von Landau angegebenen schärferen Fassung. Dieser verschärfte Satz lautet: Wenn $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ in $|z| < R$ regulär ist und dort weder Null- noch Einsstellen besitzt, wenn ϑ der Bedingung $0 < \vartheta < 1$ unterworfen ist und wenn $|a_0| \leqq k_0$ ist, so gilt in $|z| \leqq \vartheta R$ die Abschätzung

$$|f(z)| \leqq S_{0,0}(k_0, \vartheta, R).$$

Für $n = 0$ und $m = 0$ liefert also Satz I den Schottkyschen Satz. Ich bezeichne daher Satz I auch als verallgemeinerten Schottkyschen Satz und werde ihn hernach durch vollständige Induktion aus dem speziellen Schottkyschen gewinnen. Aus dem verallgemeinerten Schottkyschen Satz folgt dann in bekannter Weise die Verallgemeinerung eines Satzes, mit

dem Landau die Untersuchungen auf dem Gebiete eröffnet hat, dem auch unsere Sätze angehören. Ich will also jetzt den zweiten Satz nennen:

Satz II. *Es sei wieder* $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots$ *in* $|z| < R$ *regulär, besitze dort nicht mehr als n Nullstellen und m Einsstellen. Es sei* $n \leqq m$. *Wieder seien* $k_0, \ldots, k_n$ *positive Zahlen, und es gelte* $|a_i| \leqq k_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. *Ferner sei* $a_{n+1} \neq 0$. *Dann gibt es eine nur von* $k_0, k_1, \ldots, k_n$ *und* a_{n+1} *abhängende Schranke* $L_{n,m}(k_0, k_1, \ldots, k_n, a_{n+1})$, *für die*

$$R \leqq L_{n,m}(k_0, k_1, \ldots, k_n, a_{n+1})$$

gilt.

$n = 0$ und $m = 0$ liefert wieder den Landauschen Satz. Diesen werde ich als speziellen und meinen Satz II als verallgemeinerten Landauschen Satz bezeichnen.

Beim Beweis von Satz I mache ich von einem auch an sich wichtigen *Hilfssatz* Gebrauch, den ich jetzt als Satz III aufführen will.

Satz III. *Wieder sei* $f(z) = a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ *in* $|z| < R$ *regulär. Wieder seien* $k_1, \ldots, k_n$ *positive Zahlen. Es gelte*

$$|a_i| \leqq k_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Der durch $\omega = f(z)$ *aus dem Kreis* $|z| < R$ *entstehende Bildbereich enthalte eine n-blättrig bedeckte Kreisscheibe* $|\omega| < \mathsf{P}$. (Es sollen also n Kreisscheiben $|\omega| < \mathsf{P}$ in Verzweigungspunkten miteinander zusammenhängen, aber durch keinen Verzweigungspunkt mit anderen Blättern des Bildbereiches verbunden sein. Der Eingang in ein weiteres Blatt kann also nur nach Passieren der Kreisperipherie $|\omega| = \mathsf{P}$ gewonnen werden.) *Dann gibt es eine nur von* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *und R abhängende Schranke* $H(k_1, \ldots, k_n, R)$ *für* P, *so daß also* $\mathsf{P} \leqq H(k_1, \ldots, k_n, R)$ *gilt.*

Für $n = 1$ ergibt sich als Spezialfall der folgende bekannte Satz: Das durch $\omega = a_0 + a_1 z + \ldots$ erhaltene Bild von $|z| < R$ kann für eine in $|z| < R$ reguläre Funktion keine schlichte Kreisscheibe $|\omega - a_0| < \mathsf{P}$ enthalten, deren Radius P die Schranke $|a_1| R$ übertrifft.

Mit der Bestimmung oder Abschätzung der erwähnten Schranken befasse ich mich in dieser Arbeit nicht, wenngleich meine Methode bei geringer Umgestaltung leicht solche Schätzungen liefern würde. Ich beweise hier nur ihre Existenz. Über die prinzipielle Bedeutung meiner drei Sätze brauche ich vor einem kundigen Forum keine Worte zu verlieren.

2. Ich beginne mit einer allgemeinen Bemerkung über den Beweis des Satzes I. Ich brauche nämlich statt dessen nur zu zeigen, daß sich aus jeder den in Satz I genannten Bedingungen genügenden Funktionenfolge eine in $|z| \leqq \vartheta R$ gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen läßt.

Ich behaupte also, daß aus dem nun zu nennenden Satz I′ Satz I sofort gefolgert werden kann.

Satz I′. *Es sei eine unendliche Folge* $f_k(z)$ *von Funktionen gegeben. Keine derselben habe in* $|z| < R$ *mehr als* n *Nullstellen oder mehr als* m *Einsstellen. Es sei* $n \leqq m$. *Es gelte in* $|z| < R$

$$f_k(z) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)} z + \ldots.$$

Es gebe $n+1$ *positive von der Funktionsnummer* k *unabhängige Zahlen* $k_0, \ldots, k_n$ *derart, daß für alle* k

$$|a_i^{(k)}| \leqq k_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

gilt. Es sei $0 < \vartheta < 1$. *Dann läßt sich aus der Funktionenfolge eine andere in* $|z| \leqq \vartheta R$ *gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen.*

Aus diesem Satz I′ ergibt sich leicht Satz I durch folgende Überlegung. Satz I werde als falsch angenommen. M_k sei das Maximum von $f_k(z)$ in $|z| \leqq \vartheta_1 R$ $(\vartheta < \vartheta_1 < 1)$. Dann wären die M_k bei passender Wahl der $f_k(z)$ nicht beschränkt. Dann aber gäbe es Folgen, aus welchen man keine in $|z| \leqq \vartheta R$ gleichmäßig konvergente auswählen könnte. Ich habe also tatsächlich nur Satz I′ zu beweisen.

3. Ich bediene mich dazu der vollständigen Induktion. Das Wesen der Schlußweise will ich zunächst für $n = 0$ auseinandersetzen. In diesem Falle erhalte ich für $m = 0$ den speziellen Schottkyschen Satz. Ich darf daher annehmen, daß alle $f_k(z)$ Einsstellen besitzen. Ich nehme nun an, er sei für $m = \mu$ schon als richtig erkannt und will daraus seine Richtigkeit für $m = \mu + 1$ erschließen. Zu dem Behufe betrachte ich eine derjenigen Einsstellen ε_k von $f_k(z)$, welche einen möglichst großen absoluten Betrag besitzt. Ich darf annehmen, daß $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_k = \varepsilon$ existiert. Denn durch Herausgreifen einer Teilfolge kann ich das stets erreichen. Ich habe nun *zwei Fälle* zu unterscheiden. Der eine ist $|\varepsilon| > \vartheta R$, der andere $|\varepsilon| \leqq \vartheta R$.

Wenn also *erstens* $|\varepsilon| > \vartheta R$ gilt, so haben die Funktionen meiner Folge von einer gewissen Nummer an in einem $|z| \leqq \vartheta R$ umfassenden etwas größeren Kreis höchstens μ Einsstellen. Daher lehrt der Schottkysche Satz $(0, \mu)$ in Verbindung mit dem Vitalischen, daß man eine gleichmäßig konvergente Teilfolge herausgreifen kann.

Im *zweiten* Fall aber schließe ich so. Es sei $|\varepsilon| \leqq \vartheta R$. Dann greife ich einen beliebigen Punkt A heraus, für den $|A| = R\frac{1+\vartheta}{2}$ gelten möge. Um ihn lege ich einen Kreis vom Radius $R\frac{1-\vartheta}{4}$. In diesem sind die Funktionen der Folge von einer gewissen an — man darf annehmen von der ersten an, also alle — von Null und Eins verschieden.

Wieder muß ich zwei Fälle unterscheiden. Um diese Fallunterscheidung zu gewinnen, betrachte ich die Werte $f_k(A)$ und darf annehmen, daß dieselben einen endlichen oder unendlichen Grenzwert besitzen. Im ersten Falle kann ich mich des speziellen Schottkyschen Satzes bedienen, um zu schließen, daß die Funktionen in einem mit dem eben betrachteten konzentrischen Kreis vom halben Radius beschränkt sind. Nun verschiebe ich den erst gewählten Kreis um ein Viertel seines Radius so, daß sein Mittelpunkt den Abstand von $z = 0$ bewahrt, und erhalte wieder in einem Teilkreis vom halben Radius Beschränktheit der Funktionenfolge. Nach endlich vielen Schritten erhält man so offenbar einen $|z| \leqq \vartheta R$ umschließenden Kreisring, in dem die Funktionen der Folge gleichmäßig beschränkt sind. Daher kann man eine im Ringe gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen. Eine Teilfolge konvergiert dann aber bekanntlich auch in $|z| \leqq \vartheta R$ gleichmäßig, womit unser Satz wieder bewiesen ist.

Es bleibt also nur noch der Fall $f_k(A) \to \infty$ übrig. Dieser aber kommt in Wahrheit gar nicht vor. Das erkenne ich so. Ich betrachte die Funktionen $\frac{1}{f_k(z)}$ und operiere mit diesen genau ebenso, wie zuletzt mit den $f_k(z)$. Es gilt ja jetzt $\frac{1}{f_k(A)} \to 0$. In dem um A gelegten Kreise aber muß gleichmäßig $\frac{1}{f_k(z)} \to 0$ gelten. Denn sonst müßten nach dem Satz von Rouché[1]) die Näherungsfunktionen $\frac{1}{f_k(z)}$ genügend hoher Nummer in der Nähe von $z = A$ gleichfalls Nullstellen besitzen. Daher konvergiert eine Teilfolge in $|z| \leqq \vartheta R$ gleichmäßig gegen Null[2]). Die $f_k(z)$ also müßten in $|z| \leqq \vartheta R$ gleichmäßig gegen unendlich konvergieren. Daher würden die Funktionen genügend hoher Nummer den Kreis $|z| \leqq \vartheta R$ auf einen endlichen Bereich abbilden, der eine Stelle a_0 von einem Betrage $\leqq k_0$ bedecken muß, und dessen voller Rand beliebig weit von a_0 entfernt ist, und der trotzdem $\omega = 0$ nicht überdecken darf. Das sind aber unmögliche Zustände.

Satz I ist somit für $n = 0$ und beliebiges m bewiesen.

4. Ich komme zum Falle eines beliebigen n. Wieder bediene ich mich der vollständigen Induktion. Für $n = 0$ und ein beliebig gegebenes m ist der Satz eben bewiesen worden. Ich nehme ihn für dieses m und für $n = \nu$ als richtig an, um ihn daraus für das gleiche m und $n = \nu + 1$ zu erschließen. Die Anlage des Beweises ist die gleiche wie eben. Ich betrachte nur jetzt die Nullstellen vom größten absoluten Betrag. Alle

---

[1]) Vgl. z. B. mein Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I, S. 185.

[2]) Dies ist aber ausgeschlossen, weil doch nach Voraussetzung alle Absolutglieder in den Potenzreihen der $f_k(z)$ Beträge kleiner oder gleich k_0 besitzen. Ich schließe im Texte lieber etwas weitläufiger, weil dabei das allgemeine, auf die weiteren Fälle meines Satzes I übertragbare Schlußprinzip zum Vorschein kommt.

Schlüsse verlaufen genau wie eben unter Verwendung schon vorher bewiesener Fälle des allgemeinen Schottkyschen Satzes. Lediglich der letzte Teil, in dem es sich darum handelt, die Annahme $f_k(A) \to \infty$ als unmöglich zu erkennen, muß genauer betrachtet werden. Wieder folgt genau wie eben, daß eine Teilfolge der $f_k(z)$ in einem $|z| \leqq \vartheta R$ umschließenden Kreisring gleichmäßig gegen unendlich konvergieren muß. Da aber jetzt die reziproken Funktionen $\frac{1}{f_k(z)}$ in $|z| \leqq \vartheta R$ nicht regulär sein werden, kann man nicht schließen, daß die $f_k(z)$ auch in $|z| \leqq \vartheta R$ gleichmäßig gegen unendlich konvergieren müssen. Wohl aber kann man schließen, daß Funktionen hinreichend großer Nummer eine $|z| \leqq \vartheta R$ enthaltende Kreisscheibe auf einen Bereich abbilden müssen, dessen Rand beliebig weit vom Ursprung der Koordinaten entfernt liegt. Da aber $\omega = 0$ nur n-mal von diesem Bereiche bedeckt werden kann, so müßte der Bildbereich bei hinreichend großer Nummer der Abbildungsfunktion eine beliebig große, genau n-mal voll bedeckte Kreisscheibe enthalten können, deren bei $a_0^{(k)}$ gelegener Mittelpunkt einen Betrag $\leqq k_0$ besitzt. Das widerspricht aber dem Satz III, der aussagt, daß eine derartige Kreisscheibe nicht beliebig groß werden kann. Es bleibt uns somit noch Satz III zu beweisen.

5. Daher wende ich mich jetzt diesem Satz III zu. Ich entwickle zunächst den Beweisgedanken. Der Bildbereich, welcher durch $\omega = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$ aus $|z| < R$ entsteht, soll den n-blättrig bedeckten Kreis $|\omega| < \mathrm{P}$ enthalten. Derselbe muß daher bei der Abbildung aus einem $z = 0$ enthaltenden Teilbereich des $|z| < R$ entstanden sein. Die Abbildung dieses Teilbereiches B auf den n-blättrigen Kreis denke ich mir in zwei Schritten ausgeführt. Der erste benutzt eine Funktion

$$(1) \qquad \mathfrak{z} = z + \alpha_1 z^2 + \ldots + \alpha_{n-1} z^n + \ldots,$$

die diesen Teilbereich auf einen Kreis $|\mathfrak{z}| < r$ abbildet. Der zweite benutzt eine Funktion

$$\omega(\mathfrak{z}),$$

welche $|\mathfrak{z}| < r$ auf den n-blättrigen Kreis abbildet. Ich sehe mir zunächst die erste Funktion näher an.

6. Wenn der Teilbereich B von $|z| < R$ durch (1) auf $|\mathfrak{z}| < r$ schlicht abgebildet wird, so muß nach einem bekannten Satz aus der Theorie der konformen Abbildung der Bereich B die Kreisscheibe $|z| < \frac{r}{4}$ enthalten. In dieser Kreisscheibe konvergiert also (1) und besitzt dort einen absoluten Betrag kleiner als r. Daher lehrt der Cauchysche Koeffizientensatz die Abschätzung

$$|\alpha_{k-1}| \leqq \frac{r}{\left(\frac{r}{4}\right)^k} \qquad \text{oder} \qquad r^{k-1} |\alpha_{k-1}| \leqq 4^k.$$

Da für meine Zwecke nur die $n-1$ ersten Koeffizienten a_n in Betracht kommen, so kann ich hieraus den Schluß ziehen: Es gibt eine feste Zahl h, so daß

$$r^k |a_k| \leqq h \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{2}$$

7. Die Abbildung von $|\mathfrak{z}| < r$ auf den n-blättrigen Kreis $|\omega| < \mathsf{P}$ wird durch eine rationale Funktion vermittelt. Denn die Abbildungsfunktion muß auf $|\mathfrak{z}| = r$ noch regulär sein, und nach bekannten Sätzen muß der Spiegelung an $|\mathfrak{z}| = r$ die Spiegelung an $|\omega| = \mathsf{P}$ entsprechen. Daher ist die Abbildung in der ganzen Ebene regulär, und man erkennt außerdem, daß sie sich wie folgt muß schreiben lassen:

$$\omega = c\,\frac{\mathsf{P}}{r}\,\mathfrak{z}\,\frac{\mathfrak{z} - \varepsilon_1 r}{r - \bar{\varepsilon}_1 \mathfrak{z}} \cdots \frac{\mathfrak{z} - \varepsilon_{n-1} r}{r - \bar{\varepsilon}_{n-1}\mathfrak{z}}.$$

Hier ist $|\varepsilon_i| < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ und $|c| = 1$.

Setze ich noch

$$(\mathfrak{z} - \varepsilon_1 r)(\mathfrak{z} - \varepsilon_2 r)\cdots(\mathfrak{z} - \varepsilon_{n-1} r) = e_{n-1} r^{n-1} + e_{n-2} r^{n-2}\mathfrak{z} + \cdots + \mathfrak{z}^{n-1},$$

so kann ich auch

$$\omega = c\,\frac{\mathsf{P}}{r}\,\mathfrak{z}\,\frac{e_{n-1} r^{n-1} + e_{n-2} r^{n-2}\mathfrak{z} + \cdots + \mathfrak{z}^{n-1}}{r^{n-1} + \bar{e}_1 r^{n-2}\mathfrak{z} + \cdots + \bar{e}_{n-1}\mathfrak{z}^{n-1}}$$

schreiben. Ich entwickle nach Potenzen von $\mathfrak{z}$ und finde

$$\omega = c\mathsf{P}\varphi_1\left(\frac{\mathfrak{z}}{r}\right) + c\mathsf{P}\varphi_2\left(\frac{\mathfrak{z}}{r}\right)^2 + \cdots + c\mathsf{P}\varphi_{k+1}\left(\frac{\mathfrak{z}}{r}\right)^{k+1} + \cdots \tag{3}$$

Dabei ist

$$\varphi_1 = e_{n-1}, \quad \varphi_2 = -\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & e_{n-2} \\ 1 & e_{n-1} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \varphi_n = (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_{n-1} & 1 \\ 1 & \bar{e}_1 & & \bar{e}_{n-2} & e_1 \\ 0 & 1 & & \bar{e}_{n-3} & e_2 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & e_{n-1} \end{vmatrix}.$$

8. Trage ich nun (1) in die Reihe (3) ein und ordne nach Potenzen von z, so muß die Funktion

$$a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

entstehen. Ich führe diese Einsetzung durch und bekomme dadurch Beziehungen zwischen R, k_1, k_2, $\ldots$, k_n, P. Diese Beziehungen werden mir den Beweis des Satzes III ermöglichen. Man findet nämlich so zunächst die Gleichungen:

$$c\mathsf{P}\varphi_1\frac{1}{r} = a_1,$$

$$c\mathsf{P}\varphi_2\frac{1}{r^2} + c\mathsf{P}\varphi_1\frac{\alpha_1}{r} = a_2.$$

Daraus folgt wegen $|c| = 1$

$$|\mathsf{P}\varphi_1| \leqq r \cdot k_1 \leqq R \cdot k_1,$$
$$|\mathsf{P}\varphi_2| \leqq r^2 k_2 + |\mathsf{P}\varphi_1| r \cdot |a_1| \leqq R^2 k_2 + R \cdot k_1 \cdot h \quad \text{(nach (2))}.$$

Man erkennt hieraus, daß $\mathsf{P}\varphi_1$ und $\mathsf{P}\varphi_2$ absolute Beträge besitzen, welche unter gewissen, nur von den k_i und R abhängigen Schranken bleiben. Ich will nun beweisen, daß derartige Abschätzungen für $\mathsf{P}\varphi_k$ allgemein gelten, solange k die Zahl n nicht übertrifft. Zu dem Zwecke bediene ich mich wieder der vollständigen Induktion. Ich nehme also an, es sei bereits die Existenz von Schranken $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ $(\nu < n)$ bewiesen, welche alle nur von den k_i und von R abhängen, und die zu den Abschätzungen

$$|\mathsf{P}\varphi_1| \leqq s_1, \quad |\mathsf{P}\varphi_2| \leqq s_2, \quad \ldots, \quad |\mathsf{P}\varphi_\nu| \leqq s_\nu$$

führen. Daraus will ich schließen, daß es eine weitere, auch nur von den k_i und von R abhängende Schranke $s_{\nu+1}$ gibt, so daß auch $|\mathsf{P}\varphi_{\nu+1}| \leqq s_{\nu+1}$ gilt.

Man findet nun aber beim Einsetzen von (1) in (3) eine Gleichung von dieser Form:

$$a_{\nu+1} = c\mathsf{P}\varphi_{\nu+1}\frac{1}{r^{\nu+1}} + c\mathsf{P}\varphi_\nu \frac{A_1}{r^\nu} + c\mathsf{P}\varphi_{\nu-1}\frac{A_2}{r^{\nu-1}} + \ldots + c\mathsf{P}\varphi_1 \frac{A_\nu}{r}.$$

Dabei sind die $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ ganze rationale Funktionen der a_i mit Zahlenkoeffizienten. In keinem Glied von A_k kann das Gewicht, d. h. die Nummernsumme der a_i, die Zahl k übertreffen. Daher liegen alle $r^k A_k$ unter festen, sogar von R unabhängigen Schranken σ_k. Aus der gefundenen Gleichung folgt nun aber

$$\begin{aligned}|\mathsf{P}\varphi_{\nu+1}| &\leqq |a_{\nu+1}| r^{\nu+1} + s_\nu \sigma_1 + s_{\nu-1}\sigma_2 + \ldots + s_1 h \\ &\leqq k_{\nu+1}R^{\nu+1} + s_\nu\sigma_1 + \ldots + s_1 h.\end{aligned}$$

Hier liegt somit die rechte Seite unter einer gewissen, nur von den k_i und R abhängigen Schranke.

9. Gehen wir nun mit dieser Kenntnis über die Produkte $\mathsf{P}\varphi_k$ an die oben gegebene Determinantendarstellung der φ_k heran. Dabei ist noch zu beachten, daß die e_i als elementarsymmetrische Funktionen der ε_k (deren Beträge unter Eins liegen) beschränkt sind. Dann folgt aus $\varphi_1 = e_{n-1}$, daß auch $\mathsf{P}e_{n-1}$ unter einer solchen Schranke liegt. Daher lehrt die Darstellung von φ_2, daß auch $\mathsf{P}e_{n-2}$ unter einer solchen Schranke sich befindet. So kann man von Determinante zu Determinante weiterschließen, bis man schließlich der letzten (φ_n) entnimmt, daß P selbst unter einer nur von den k_i und von R abhängigen Schranke liegen muß. Damit ist aber der Satz III bewiesen. Und damit ist auch der Beweis von Satz I endgültig beschlossen.

10. Ich wende mich daher zu dem noch übrigbleibenden verallgemeinerten Landauschen Satz II, der sich unter Verwendung von Vitalischem und Picardschem Satz aus dem verallgemeinerten Schottkyschen schließen läßt.

Wegen Satz I liefert der Cauchysche Koeffizientensatz die Abschätzung

$$|a_{n+h}| \leqq \frac{S_{n,m}(k_0, k_1, \ldots, k_n, \frac{1}{2}, R)}{(\frac{1}{2}R)^{n+h}}.$$

Es gibt somit Schranken für die Koeffizienten einer den Voraussetzungen von Satz I oder II genügenden Funktion. Insbesondere sei $s_{n,m}(k_0, \ldots, k_n, R)$ die kleinstmögliche Schranke für a_{n+1}. Es gilt also

$$|a_{n+1}| \leqq s_{n,m}(k_0, \ldots, k_n, R).$$

Wenn R wächst, kann diese Schranke nicht zunehmen, denn die Funktionen, die für ein größeres R die Bedingungen des Satzes II erfüllen, sind unter denjenigen mit enthalten, welche für ein kleineres R diese Eigenschaft besitzen. Daher existiert der $\lim\limits_{R \to \infty} s_{n,m}$. Ich werde beweisen, daß er Null ist. Dazu setze ich ihn gleich s und nehme an, es sei $s > 0$. Dann betrachte ich eine Folge von Funktionen $f_k(z)$. $f_k(z)$ möge in $|z| < k$ den Bedingungen von Satz II genügen. Die Koeffizienten a_{n+1} der $f_k(z)$ mögen alle einen $\frac{s}{2}$ übertreffenden Betrag haben. Der Satz I oder I′ gibt dann die Möglichkeit, aus dieser Folge eine andere auszuwählen, die in jedem endlichen Bezirk der Ebene gleichmäßig konvergiert. Die Grenzfunktion ist also eine ganze Funktion, welche nicht mehr als n Nullstellen und m Einsstellen besitzt. Nach dem Picardschen Satze ist sie also eine ganze rationale Funktion. Der Grad derselben ist aber mindestens $n+1$, weil doch nach unserer Annahme über die a_{n+1} der Koeffizient von z^{n+1} in der Grenzfunktion nicht verschwinden kann. Dann haben wir aber einen Widerspruch mit dem Fundamentalsatz der Algebra. Daraus folgt, daß $s = 0$ sein muß.

Besitzt also in einer den Bedingungen von Satz II genügenden Funktion der Koeffizient a_{n+1} einen von Null verschiedenen Wert, so kann der Radius R eines Kreises $|z| < R$, in dem die Funktion nicht mehr als n Nullstellen und m Einsstellen besitzt, eine gewisse, von den k_i und von a_{n+1} abhängende Schranke nicht übersteigen. Damit ist auch der Satz II bewiesen.

(Eingegangen am 19. 6. 1921.)

Über die geometrische Veranschaulichung einer Riemannschen Formel aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen.

Von

Ernst Richard Neumann in Marburg.

Unter den Anwendungen der elliptischen Transzendenten nimmt von alters her die Theorie der Ponceletschen Polygone eine wichtige Stelle ein, und fast alle einschlägigen Lehrbücher widmen ihr eine eingehende Behandlung — und doch besteht zwischen der bekannten Figur mit dem einem Kreise einbeschriebenen und gleichzeitig einem anderen umbeschriebenen Polygonzuge und den elliptischen Funktionen *in einem Grenzfalle* noch ein Zusammenhang, der bisher nicht bemerkt zu sein scheint. — Ich will ihn im folgenden kurz auseinandersetzen; er führt zu einer äußerst einfachen graphischen Darstellung für gewisse Werte der Funktion $sn\,u$, die sich sogar zu einer numerischen Auswertung eignen dürfte, und zu einer interessanten geometrischen Veranschaulichung einer bekannten von Riemann herrührenden Formel.

In der klassischen Theorie der Ponceletschen Polygone handelt es sich vor allem um die Beantwortung der Frage, wann sich ein solcher Polygonzug schließt, und die Lösung dieses Problems, welche Jacobi mit Hilfe der elliptischen Funktionen gab[1]), beruht wesentlich auf folgendem Grundgedanken: Es wird auf der Peripherie des umbeschriebenen Kreises an Stelle des Zentriwinkels ψ (den wir stets vom Radius nach dem Punkte weitester Entfernung vom kleinen Kreise aus rechnen) ein neuer Parameter σ derart eingeführt, daß die den sukzessiven Ecken des Polygonzuges entsprechenden Werte desselben eine arithmetrische Reihe bilden,

$$\sigma = \sigma_0, \quad \sigma_0 \pm \delta, \quad \sigma_0 \pm 2\delta, \quad \sigma_0 \pm 3\delta, \quad \ldots$$

Einen solchen Parameter stellt das elliptische Integral

$$(1) \qquad \sigma = \int_0^{\sin\frac{\psi}{2}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} = \int_0^{\frac{\psi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}}$$

[1]) Vgl. C. G. J. Jacobi, Ges. Werke, **1**, S. 277–293.

dar, so daß man also die zwischen dem Zentriwinkel ψ und diesem neuen Parameter σ bestehende Beziehung auch folgendermaßen schreiben kann:

$$(2) \qquad \frac{\psi}{2} = am\,\sigma.$$

Dabei gilt für den Modul die Formel:

$$(3) \qquad \varkappa^2 = \frac{(R+c)^2-(R-c)^2}{(R+c)^2-r^2} < 1 \qquad (\text{da } r < R-c),$$

wo R und r die Radien des um- bzw. einbeschriebenen Kreises und c ihren Zentralabstand bedeuten, und die Differenz δ der arithmetischen Reihe bestimmt sich aus der Formel:

$$(4) \qquad cn\,\delta = \frac{r}{R+c} \quad \text{oder auch:} \quad dn\,\delta = \frac{R-c}{R+c}.$$

Die Bedingung dafür, daß der Polygonzug sich schließt, besteht dann darin, daß diese Differenz δ in einem rationalen Verhältnis zum „vollständigen Integrale K" steht, und zwar muß, wenn die Schließung mit p Seiten nach q-maliger Umlaufung des kleinen Kreises erfolgen sollte,

$$\delta = \frac{q}{p}\cdot 2\,\mathrm{K} \quad \text{und daher} \quad sn\,p\delta = 0$$

sein, und diese letztere Bedingung pflegt man dann noch vermittelst der bekannten Additionstheoreme der Jacobischen Funktionen in die Größen R, r und c umzurechnen.

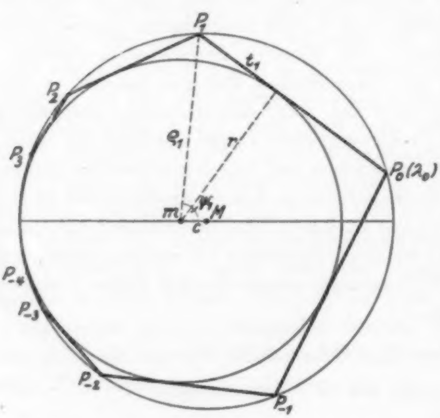


Fig. 1.

Geht man nun in unserer Figur zu dem Grenzfalle über, wo sich die *beiden Kreise berühren*, so verliert die Frage, wann sich der Polygonzug zwischen ihnen schließt, jede Bedeutung. Wenn man aber in diesem Falle nach der *Länge* des Linienzuges fragte, kommt man, wie ich jetzt zeigen will, wieder auf elliptische Funktionen.

Als Parameter auf dem größeren Kreise behalten wir σ bei, oder wenigstens die Werte λ, in welche die σ in diesem Grenzfalle übergehen. Da jetzt $r = R - c$ und daher nach Formel (3) der Modul $\varkappa = 1$ ist, folgt für den Zusammenhang zwischen dem Parameter λ und dem Zentriwinkel ψ:

$$(1') \qquad \lambda = \int_0^{\sin\frac{\psi}{2}} \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\frac{\psi}{2}}{1-\sin\frac{\psi}{2}} \qquad \text{oder} \qquad e^\lambda = \operatorname{tg}\frac{\pi+\psi}{4}$$

oder auch

$$(2') \qquad \sin\frac{\psi}{2} = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{e^\lambda + e^{-\lambda}} = \mathfrak{Tg}\,\lambda.$$

Die Verteilung dieser Parameterwerte λ auf der Peripherie des äußeren Kreises ist danach also in dem betrachteten Grenzfalle (im Gegensatz zu den σ im allgemeinen Falle) völlig unabhängig von der Wahl des zweiten, kleineren Kreises — nach wie vor aber bilden die Parameterwerte, die den Ecken des Polygonzuges entsprechen, eine arithmetische Reihe

$$\lambda = \lambda_0, \quad \lambda_0 \pm \alpha, \quad \lambda_0 \pm 2\alpha, \quad \lambda_0 \pm 3\alpha, \quad \ldots,$$

und die Gleichung (4) zur Bestimmung der Differenz dieser Reihe nimmt jetzt die Gestalt an:

$$(4') \qquad \frac{2}{e^\alpha + e^{-\alpha}} = \frac{r}{R+c} = \frac{R-c}{R+c},$$

und dafür können wir auch schreiben:

$$(5) \qquad e^{-\alpha} = \frac{\sqrt{R}-\sqrt{c}}{\sqrt{R}+\sqrt{c}}.$$

Wir berechnen nun das Stück einer Polygonseite, das zwischen den beiden Kreisen liegt, also die Länge t_n der von einer Ecke P_n des Polygons mit dem Parameter $\lambda_n = \lambda_0 + n\alpha$ an den kleinen Kreis gelegten Tangente. Es ist

$$t_n^2 = \varrho_n^2 - r^2 \qquad (\text{wo } \varrho_n = \overline{mP_n})$$

oder

$$t_n^2 = (R^2 + c^2 + 2Rc\cos\psi_n) - (R-c)^2 = 2Rc(1+\cos\psi_n),$$

also t_n selber:

$$t_n = 2\sqrt{Rc}\cos\frac{\psi_n}{2} = 2\sqrt{Rc}\cdot\frac{2}{e^{\lambda_n}+e^{-\lambda_n}},$$

d. i.

$$(6) \qquad t_n = \frac{4\sqrt{Rc}}{e^{\lambda_0+n\alpha}+e^{-\lambda_0-n\alpha}},$$

und daher ergibt sich für die *Länge L des ganzen Polygonzuges* in ihrer Abhängigkeit von dem Parameter λ_0 der Ausgangsecke:

$$(7) \qquad L(\lambda_0) = 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} t_n = 8\sqrt{Rc}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{e^{\lambda_0+n\alpha}+e^{-\lambda_0-n\alpha}}.$$

Um die Bedeutung dieses Resultates zu erkennen, erweitern wir die Summe rechterhand mit $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = -e^{-i\frac{\pi}{2}}$ und schreiben:

$$L(\lambda_0) = 8i\sqrt{Rc}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^{\lambda_0 + \frac{\pi i}{2} - \frac{\alpha}{2}} \cdot e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha} - e^{-\lambda_0 - i\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}} \cdot e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}},$$

und nun setzen wir den echten Bruch $e^{-\alpha}$ gleich der seit Jacobi in der Theorie der elliptischen Funktionen mit q bezeichneten Größe $e^{-\pi\frac{\mathsf{K}'}{\mathsf{K}}}$, also nach (5):

$$(8) \qquad \frac{\sqrt{R}-\sqrt{c}}{\sqrt{R}+\sqrt{c}} = q \quad \text{und} \quad \alpha = \pi\frac{\mathsf{K}'}{\mathsf{K}},$$

und ferner

$$(9) \qquad 2\lambda_0 + i\pi - \alpha = i\frac{\pi}{\mathsf{K}}u,$$

wo K und K' die beiden zu q gehörigen vollständigen elliptischen Integrale bedeuten, deren ersteres z. B. durch die Gleichung

$$\sqrt{\mathsf{K}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots)$$

definiert gedacht werden kann. — Dann ist

$$L(\lambda_0) = 8i\sqrt{Rc}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}q^{-(n+\frac{1}{2})} - s^{-\frac{1}{2}}q^{n+\frac{1}{2}}} \qquad \left(s = e^{i\frac{\pi}{\mathsf{K}}u}\right)$$

und diese Summe stellt, von konstanten Faktoren abgesehen, gerade *die Riemannsche Partialbruchzerlegung der Funktion sn u* dar:

$$(\mathrm{F}) \qquad sn\,u = i\frac{\pi}{k\mathsf{K}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}q^{-(n+\frac{1}{2})} - s^{-\frac{1}{2}}q^{n+\frac{1}{2}}},\ ^{*})$$

in der k wie üblich den „Modul" der elliptischen Funktion bedeutet.

Wir erhalten so das Resultat:

$$L(\lambda_0) = \frac{8k\mathsf{K}}{\pi}\sqrt{Rc}\cdot sn\,u$$

oder, wenn wir noch für u seine Bedeutung aus (9) einsetzen:

$$10) \qquad L(\lambda_0) = \frac{8k\mathsf{K}}{\pi}\sqrt{Rc}\,sn\left(\mathsf{K} + i\mathsf{K}' - i\frac{2\mathsf{K}}{\pi}\lambda_0\right).$$

Es wird also von konstanten Faktoren abgesehen, die Gesamtlänge L jenes Polygonzuges in ihrer Abhängigkeit von der Wahl des Punktes $P_0(\lambda_0)$ auf dem größeren Kreise dargestellt durch die Werte der Funktion $sn\,u$ auf einer Geraden in der u-Ebene, die im Abstande K parallel zur imaginären Achse verläuft — was aber interessanter als dieses Resultat selbst sein dürfte, ist

*) Vgl. Riemanns Vorlesungen über elliptische Funktionen, herausgegeben von H. Stahl (Leipzig 1899 bei Teubner), S. 31. — Wenn diese Formel auch aufs engste mit bekannten Formeln von Jacobi zusammenhängt, habe ich doch nicht feststellen können, daß sie sich *in obiger Form* schon vor Riemann in der Literatur findet, weshalb ich sie eben als „Riemannsche Formel" bezeichne.

die aus der Ableitung hervorgehende Tatsache, daß *die Teile, in welche die einzelnen Seiten des Polygonzuges durch die Berührungspunkte mit dem kleineren Kreise zerfallen, gerade den einzelnen Gliedern der Riemannschen Partialbruchentwicklung jener Werte von $sn\,u$ entsprechen*, so daß wir sagen können: *der Polygonzug gibt ein anschauliches Bild von der Geschwindigkeit, mit der jene Riemannsche Partialbruchreihe* (F) *für Argumente von der Form $u = \mathsf{K} + iv$ konvergiert.*

Diese Werte von $sn\,u$ für Argumente mit dem reellen Teile K sind (einfach) *periodisch*, und auf eine periodische Funktion mußte auch die Behandlung unserer geometrischen Aufgabe naturgemäß führen, da es ja klar ist, daß die Vertauschung von λ_0 und $\lambda_0 + \alpha$ (d. i. von P_0 und P_1) keinen Einfluß auf die Länge L unseres Polygonzuges hat. — Die Grenzen, zwischen denen jene Werte von $sn\,u$ schwanken, sind 1 und $\frac{1}{k} > 1$, und zwar werden diese beiden extremen Werte erreicht z. B. wenn der Imaginärteil gleich 0 bzw. gleich $i\mathsf{K}'$ ist, also in unserem Falle, wenn

$$i\mathsf{K}' - i\frac{2\mathsf{K}}{\pi}\lambda_0 = 0 \text{ bzw.} = i\mathsf{K}'$$

ist, d. h. für

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{2}\frac{\mathsf{K}'}{\mathsf{K}} = \frac{\alpha}{2} \text{ bzw. } \lambda_0 = 0$$

oder: wenn der Polygonzug *symmetrisch* zur Zentralen der beiden Kreise verläuft, indem diese entweder durch den Berührungspunkt einer Seite mit dem kleineren Kreise oder durch eine Ecke auf dem größeren Kreise hindurchgeht (Fig. 2), und für die Längen dieser beiden ausgezeichneten Linienzüge ergeben sich die Werte:

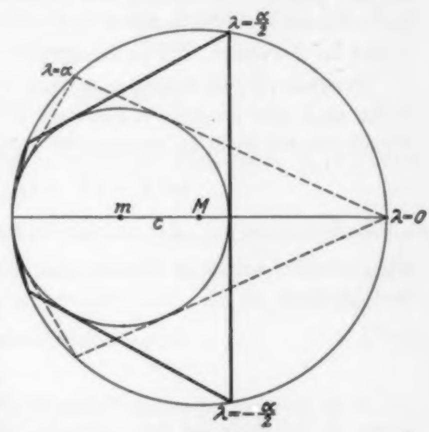


Fig. 2.

$$(11) \qquad \begin{aligned} L_{\min} &= L\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{8k\mathsf{K}}{\pi}\sqrt{Rc}, \\ L_{\max} &= L(0) \quad = \frac{8\mathsf{K}}{\pi}\sqrt{Rc}. \end{aligned}$$

Wir nehmen nun im folgenden immer an, wie das bei Anwendungen häufig der Fall ist, es sei *die Größe q gegeben*. Dann gestattet uns Formel (8) sofort das Verhältnis

$$\frac{c}{R} = \left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2$$

zu bestimmen, so daß wir imstande sind, in beliebigem Maßstabe die diesem q-Werte entsprechende Grundfigur, bestehend aus den beiden einander berührenden Kreisen, zu zeichnen, und dann liefert uns nach den Formeln (11) die einfache, mit großer Annäherung mögliche Ausmessung des *größeren* der beiden symmetrischen Polygonzüge sofort den zugehörigen Wert von K, und in dem *Verhältnis* der Längen *beider* Linienzüge erhalten wir dann weiter den zugehörigen Modul k. — Denken wir uns nun noch auf dem größeren Kreise eine Skala der λ-Werte angebracht[3]), d. h. in einer größeren Anzahl von Punkten die zugehörigen Werte des Parameters λ herangeschrieben, so können wir der Figur sofort den zu q gehörigen Wert von $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{\mathsf{K}'}{\mathsf{K}}$ entnehmen und damit auch K' ermitteln, und endlich können wir dann nach Formel (10) auch noch durch Ausmessen weiterer Polygonzüge die Werte von $sn\,u$ für beliebige Argumente u mit dem reellen Teile K bestimmen. — *So haben wir also in unserer Figur ein bequemes Mittel, falls die Jacobische Größe q gegeben ist, mit großer Annäherung die zugehörigen Werte des Moduls k sowie der vollständigen Integrale K und K' und endlich auch gewisse Wertreihen der Funktion $sn\,u$ zu bestimmen.*

Erwähnt sei zum Schluß noch, daß wir aus unserem Hauptresultate (10) leicht noch alle imaginären Elemente beseitigen können. Wir machen Gebrauch von der leicht zu beweisenden Formel

$$sn(\mathsf{K} + i\,\mathsf{K}' + i\,u) = \frac{1}{k}\,\overline{dn}\,u,$$

wo die Überstreichung andeuten soll, daß es sich hier um diejenige Funktion $\overline{dn}\,u$ handelt, welche zu dem Komplementärmodul $k' = \sqrt{1 - k^2}$ gehört. — So folgt denn:

$$L(\lambda_0) = \frac{8\,\mathsf{K}}{\pi} \sqrt{Rc \cdot \overline{dn}\left(\frac{2\,\mathsf{K}}{\pi}\,\lambda_0\right)}. \tag{10'}$$

[3]) Es kann dies sogleich ein für allemal geschehen, da ja, wie oben hervorgehoben wurde, die Verteilung der Parameterwerte auf dem äußeren Kreise gänzlich unabhängig von der Größe des inneren Kreises und also auch von q ist. — Die *Herstellung* dieser Skala läßt sich unter Benutzung einer Kurve für die Exponentialfunktion e^x nach der zweiten Formel (1′) leicht graphisch ausführen, oder aber man kann, wenn der zu *einem* λ-Werte γ (z. B. zu $\lambda = 1$) gehörige Peripheriepunkt etwa rechnerisch bestimmt ist, nach einem aus Fig. 2 ohne weiteres ersichtlichen Verfahren die zu $\frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma}{4}, \frac{3\gamma}{4}, \frac{\gamma}{8}$, usw. gehörigen Punkte durch geometrische Konstruktion gewinnen. — Um die Vorstellung zu fixieren, sei noch bemerkt, daß zu $\lambda = 1$ der Punkt mit einem Zentriwinkel von $99°\,12',6$ gehört.

(Eingegangen am 3. 9. 1921.)

Ein Kriterium für den positiv definiten Charakter von Fourierintegralen und die Darstellung solcher als Summe von Quadraten.

Von

F. Bernstein in Göttingen.

Gestattet eine für alle reellen Argumente reguläre Funktion $\mathfrak{P}(x)$ eine beständig konvergente Entwicklung der Form

$$\mathfrak{P}(x+y)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{P}_\mu(x)\,\mathfrak{P}_\mu(y)}{\lambda_\mu},$$

wo die gleichfalls für alle reellen x regulären Funktionen $\mathfrak{P}_\mu(x)$ durch konvergente Reihen der Form

$$\mathfrak{P}_\mu(x)=x^\mu(1+\alpha_{\mu 1}x+\alpha_{\mu 2}x^2+\ldots)\qquad(\mu=0,1,2,\ldots)$$

in der Umgebung der Stelle $x=0$ definiert sind, so läßt sich leicht zeigen, daß die Entwicklung nur *eindeutig* möglich ist. Es ist nämlich, wenn für $n=0$ der Ausdruck $\sum\limits_{\mu=0}^{n-1}$ Null bedeutet:

$$\mathfrak{P}(x+y)-\sum_{\mu=0}^{n-1}\frac{\mathfrak{P}_\mu(x)\,\mathfrak{P}_\mu(y)}{\lambda_\mu}=\frac{\mathfrak{P}_n(x)}{\lambda_n}\,y^n(1+\alpha_{n1}y+\ldots)$$
$$+\,x^{n+1}y^{n+1}\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}+\ldots\right),$$

$$\frac{\mathfrak{P}(x+y)-\sum\limits_{\mu=0}^{n-1}\dfrac{\mathfrak{P}_\mu(x)\,\mathfrak{P}_\mu(y)}{\lambda_\mu}}{y^n}=\frac{\mathfrak{P}_n(x)}{\lambda_n}(1+\alpha_{n1}y+\ldots)+x^{n+1}y\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}+\ldots\right),$$

also

$$\lim_{y=0}\frac{\mathfrak{P}(x+y)-\sum\limits_{\mu=0}^{n-1}\dfrac{\mathfrak{P}_\mu(x)\,\mathfrak{P}_\mu(y)}{\lambda_\mu}}{y^n}=\frac{\mathfrak{P}_n(x)}{\lambda_n}.$$

Durch diese Gleichungen sind die $\mathfrak{P}_n(x)$ und damit die λ_n sukzessive eindeutig definiert.

Außerdem lassen sich die $\mathfrak{P}_n(x)$ *linear* durch $\mathfrak{P}(x)$ und seine Ableitungen ausdrücken. Es ist

$$\mathfrak{P}(x+y)-\sum_{\mu=0}^{n-1}\frac{\mathfrak{P}_\mu(x)\,\mathfrak{P}_\mu(y)}{\lambda_\mu}=\frac{\mathfrak{P}_n(y)}{\lambda_n}\,\mathfrak{P}_n(x)+y^{n+1}\,\Phi(x,y).$$

Differenzieren wir n-mal nach y, so erhalten wir wegen

$$\frac{\partial^n\,\mathfrak{P}(x+y)}{\partial y^n}=\frac{d^n\,\mathfrak{P}(x+y)}{d(x+y)^n}=\mathfrak{P}^{(n)}(x+y):$$

$$\mathfrak{P}^{(n)}(x+y)-\sum_{\mu=0}^{n-1}\frac{\mathfrak{P}_\mu^{(n)}(y)}{\lambda_\mu}\,\mathfrak{P}_\mu(x)=\frac{\mathfrak{P}_n^{(n)}(y)}{\lambda_n}\,\mathfrak{P}_n(x)+(n+1)!\,y\Phi(x,y)$$
$$+\binom{n}{1}\frac{(n+1)!}{2}\,y^2\,\frac{\partial\,\Phi(x,y)}{\partial y}+\ldots+y^{n+1}\,\frac{\partial^n\,\Phi(x,y)}{\partial y^n}.$$

Setzen wir $y=0$, so ergibt sich, da

$$\mathfrak{P}_n^{(n)}(y)=n!+\alpha_{n1}(n+1)\,n\ldots 2\,y+\ldots$$

ist:

$$\mathfrak{P}^{(n)}(x)-\sum_{\mu=0}^{n-1}\frac{\mathfrak{P}_\mu^{(n)}(0)}{\lambda_\mu}\,\mathfrak{P}_\mu(x)=\frac{n!}{\lambda_n}\,\mathfrak{P}_n(x).$$

Wendet man diese Formel statt auf n auf $n-1$, dann auf $n-2$ usw. an, so kann man schließlich rekursiv $\mathfrak{P}_n(x)$ linear durch $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}'(x)$, $\ldots$, $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$ ausdrücken.

Ist $\mathfrak{P}(x)$ speziell eine *gerade Funktion*, so sind alle $\mathfrak{P}_{2\nu}$ gerade, alle $\mathfrak{P}_{2\nu+1}$ ungerade Funktionen. Denn setzt man

$$\mathfrak{P}_\mu(x)=x^\mu\,\mathfrak{Q}_\mu(x),$$

so ist einerseits:

$$\mathfrak{P}(-x-y)=\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{2\mu}\,\frac{x^\mu\,\mathfrak{Q}_\mu(-x)\,y^\mu\,\mathfrak{Q}_\mu(-y)}{\lambda_\mu},$$

andererseits:

$$\mathfrak{P}(-x-y)=\mathfrak{P}(x+y)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{x^\mu\,\mathfrak{Q}_\mu(x)\,y^\mu\,\mathfrak{Q}_\mu(y)}{\lambda_\mu}.$$

Aus der eingangs bewiesenen Eindeutigkeit der Darstellung folgt:

$$\mathfrak{Q}_\mu(-x)=\mathfrak{Q}_\mu(x).$$

Folglich ist

$$\mathfrak{P}_\mu(-x)=(-x)^\mu\,\mathfrak{Q}_\mu(-x)=(-1)^\mu\,x^\mu\,\mathfrak{Q}_\mu(x)=(-1)^\mu\,\mathfrak{P}_\mu(x).$$

Es besteht der

Satz: *Es sei $\mathfrak{P}(x)$ eine gerade, für alle reellen x reguläre Funktion und*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}^{(n)}(u)\, e^{-h^2 u^2}\, du$$

für ein $h > 0$ und für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ absolut konvergent. Besitzt die Funktion $\mathfrak{P}(x)$ eine für alle reellen x und y gleichmäßig konvergente Entwicklung der Form

$$\mathfrak{P}(x+y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{\mathfrak{P}_{\mu}(x)\, \mathfrak{P}_{\mu}(y)}{\lambda_{\mu}},$$

wo

$$\mathfrak{P}_{\mu}(x) = x^{\mu}(1 + \alpha_{\mu 1} x + \alpha_{\mu 2} x^2 + \ldots)$$

ist, so ist

$$J(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}(u)\, e^{-h^2 u^2} \cos u t\, du$$

unter der Bedingung

$$\boxed{\lambda_{\mu} > 0}$$

für jedes reelle t positiv und als Summe von Quadraten in der Form

$$J(t) = 2\frac{h}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2\nu}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}_{2\nu}(x)\, e^{-2h^2 x^2} \cos x t\, dx \right]^2 \right.$$
$$\left. + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2\nu+1}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}_{2\nu+1}(x)\, e^{-2h^2 x^2} \sin x t\, dx \right]^2 \right\}$$

darstellbar.

Beweis. Da $\mathfrak{P}(u)$ gerade ist, so folgt:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} J(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}(u)\, \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 u^2}\, e^{iut}\, du.$$

Für $h > 0$ ist

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 v^2}\, dv = 1,$$

also

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} J(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}(u)\, \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 u^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 v^2}\, dv\, e^{iut}\, du$$
$$= \iint \mathfrak{P}(u)\, \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 u^2}\, \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 v^2}\, e^{iut}\, du\, dv,$$

erstreckt über die ganze uv-Ebene. Durch die Transformation

$$u = x + y, \qquad v = x - y$$

erhalten wir:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} J(t) = 2\iint \mathfrak{P}(x+y) \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x+y)^2} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-y)^2} e^{i(x+y)t}\, dx\, dy$$

$$= 2\iint \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{\mathfrak{P}_{\mu}(x)\,\mathfrak{P}_{\mu}(y)}{\lambda_{\mu}} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-2h^2x^2} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-2h^2y^2} e^{i(x+y)t}\, dx\, dy,$$

erstreckt über die xy-Ebene. Da die Reihe für alle x und y gleichmäßig konvergiert, so folgt:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} J(t) = 2\sum_{\mu=0}^{N} \frac{(-1)^{\mu}}{\lambda_{\mu}} \iint \mathfrak{P}_{\mu}(x) \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-2h^2x^2} e^{ixt} \cdot \mathfrak{P}_{\mu}(y) \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-2h^2y^2} e^{iyt}\, dx\, dy$$

$$+ 2\iint R_N(x,y) \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-2h^2x^2} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-2h^2y^2} e^{i(x+y)t}\, dx\, dy,$$

wo N_0 so gewählt werden kann, daß bei $N > N_0$ für alle x, y gleichmäßig $|R_N(x,y)| < \delta$, also

$$\left| 2\iint R_N(x,y) \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-2h^2x^2} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-2h^2y^2} e^{i(x+y)t}\, dx\, dy \right|$$

$$< 2\delta \frac{h^2}{\pi} \iint e^{-2h^2(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \delta$$

ist. Das Restintegral strebt also für $N \to \infty$ gegen 0, so daß man erhält

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} J(t) = 2\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu}}{\lambda_{\mu}} \iint \mathfrak{P}_{\mu}(x) \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-2h^2x^2} e^{ixt} \cdot \mathfrak{P}_{\mu}(y) \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-2h^2y^2} e^{iyt}\, dx\, dy$$

$$= 2\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu}}{\lambda_{\mu}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}_{\mu}(x) \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-2h^2x^2} e^{ixt}\, dx \right\}^2;$$

denn das Integral in $\{\,\}$ existiert und konvergiert absolut, da $\mathfrak{P}_{\mu}(x)$ linear durch $\mathfrak{P}(x)$ und seine Ableitungen darstellbar ist und für alle $\mathfrak{P}^{(n)}(x)$ nach Voraussetzung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{P}^{(n)}(x)|\, e^{-h^2x^2}\, dx,$$

also a fortiori

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{P}^{(n)}(x)|\, e^{-2h^2x^2}\, dx$$

konvergiert. — Nun ist aber $\mathfrak{P}_{2\nu}$ gerade, $\mathfrak{P}_{2\nu+1}$ ungerade, also

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} J(t) = 2\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2\nu}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}_{2\nu}(x) \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-2h^2x^2} \cos xt\, dx \right\}^2$$

$$+ 2\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2\nu+1}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}_{2\nu+1}(x) \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-2h^2x^2} \sin xt\, dx \right\}^2$$

Eine *spezielle* Funktion, auf die sich unser Theorem anwenden läßt, ist

$$\mathfrak{P}(x) = \operatorname{cn} x \qquad \text{(cosinus amplitude } x\text{)}.$$

Sie besitzt das Additionstheorem

$$\operatorname{cn}(x+y) = \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{cn} y - \operatorname{dn} x \operatorname{dn} y \operatorname{sn} x \operatorname{sn} y}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y} \qquad (|k| < 1),$$

also ist

$$\begin{aligned}\operatorname{cn}(x+y) &= \operatorname{cn} x \cdot \operatorname{cn} y - \operatorname{dn} x \operatorname{sn} x \cdot \operatorname{dn} y \operatorname{sn} y \\ &+ k^2 \operatorname{cn} x \operatorname{sn}^2 x \cdot \operatorname{cn} y \operatorname{sn}^2 y - k^2 \operatorname{dn} x \operatorname{sn}^3 x \cdot \operatorname{dn} y \operatorname{sn}^3 y + \dots\end{aligned}$$

Dies ist eine Entwicklung der verlangten Form mit

$$\lambda_{2\nu} = \frac{1}{k^{2\nu}}, \qquad \lambda_{2\nu+1} = \frac{1}{k^{2\nu}};$$

$$\mathfrak{P}_{2\nu}(x) = \operatorname{cn} x \operatorname{sn}^{2\nu} x = x^{2\nu}(1 + \dots),$$

$$\mathfrak{P}_{2\nu+1}(x) = \operatorname{dn} x \operatorname{sn}^{2\nu+1} x = x^{2\nu+1}(1 + \dots),$$

die gleichmäßig konvergent für alle reellen x, y ist. Denn der Rest der Reihe hinter dem 2ν-ten Gliede ist absolut genommen kleiner als

$$2|k|^{2(\nu+1)} + 2|k|^{2(\nu+2)} + \dots = 2\frac{|k|^{2(\nu+1)}}{1 - |k|^2},$$

liegt also unabhängig von x, y unter einer für $\nu \to \infty$ gegen 0 strebenden Schranke. — Da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{cn}^{(n)} u \, e^{-h^2 u^2} du$$

für jedes $h > 0$ und $n = 0, 1, 2, \dots$ absolut konvergiert, so ist also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{cn} u \, e^{-h^2 u^2} \cos u t \, du$$

bei jedem $h > 0$ für alle reellen t positiv und gleich

$$\begin{aligned}2\frac{h}{\sqrt{\pi}}\Bigg\{&\sum_{\nu=0}^{\infty}\Big[k^\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{cn} x \operatorname{sn}^{2\nu} x \, e^{-2h^2x^2} \cos x t \, dx\Big]^2 \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\infty}\Big[k^\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{dn} x \operatorname{sn}^{2\nu+1} x \, e^{-2h^2x^2} \sin x t \, dx\Big]^2\Bigg\}.\end{aligned}$$

(Eingegangen am 21. 11. 1921.)

Über rationale Polynome mit einer Minimumseigenschaft.

Von

Otto Blumenthal in Aachen.

Eine Fragestellung aus dem Gebiete der ganzen transzendenten Funktionen hatte mich zu der Aufgabe geführt, trigonometrische Polynome mit einer gegebenen Zahl reeller Nullstellen und einer gewissen Minimumseigenschaft zu untersuchen, die darin besteht, daß die Summe der Quadrate der Koeffizienten einer bestimmten Anzahl höchster Glieder möglichst klein werden soll [1]). Es lag nahe, die gleiche Aufgabe für rationale Polynome zu stellen, sie erwies sich aber hier als außerordentlich viel schwieriger. Obwohl ich die Schwierigkeiten noch nicht vollständig überwunden habe, glaube ich doch den Weg zur Lösung genügend deutlich zu sehen, daß ich die bisherigen Ergebnisse veröffentlichen kann, in der Hoffnung, sie demnächst zu vervollständigen.

Wir betrachten die Gesamtheit der Polynome $M(x)$ n-ten Grades, die in einem Kreis vom Radius r um den Nullpunkt mindestens m $(\leq n)$ Nullstellen haben. Die Minimumseigenschaft ist in § 1 angegeben. Die Nebenbedingung der Nullstellenzahl kann auch im Anschluß an das isoperimetrische Problem der Variationsrechnung in der Form

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(r)} \frac{M'(x)}{M(x)}\,dx = m$$

gegeben werden, wo das Integral über eine die Peripherie des Kreises beliebig eng umschließende Kontur zu erstrecken ist. Ebenso ließe sich die Minimumbedingung als Minimum eines Integralquotienten ausdrücken, nämlich

$$\frac{\int |M - M_{m-1}|^2\,dx}{\int |M|^2\,dx} = \text{Min.},$$

[1]) Math. Zeitschr. 1 (1918); siehe auch Math. Ann. 77 (1916).

wo M_{m-1} den m-ten „Abschnitt" des Polynoms M bedeutet, und die Integratinen über die Peripherie des Einheitskreises zu erstrecken sind. Die üblichen Methoden der Variationsrechnung versagen jedoch und müssen durch besondere ersetzt werden. Die große Schwierigkeit wird durch die Begrenzung des Kreisgebiets hineingetragen. Das Fehlen einer Begrenzung ermöglichte die vollständige Lösung bei trigonometrischen Polynomen.

1. Die einfachsten Eigenschaften der Minimumpolynome.

Wir betrachten die Gesamtheit der Polynome

$$M(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \ldots + \mu_n x^n \tag{1}$$

mit beliebigen, reellen oder komplexen Koeffizienten, welche mindestens m ($\leqq n$) Nullstellen im Innern oder auf dem Rande eines Kreises k vom Radius r um den Nullpunkt besitzen. Es ist leicht zu sehen, daß im Bereiche dieser Polynome, d. h. ihrer Koeffizienten μ_i, der Ausdruck

$$s = s(M) = \frac{|\mu_m|^2 + |\mu_{m+1}|^2 + \ldots + |\mu_n|^2}{|\mu_0|^2 + |\mu_1|^2 + \ldots + |\mu_{m-1}|^2} \tag{2}$$

ein von Null verschiedenes Minimum haben muß[2]).

Welche Polynome liefern das Minimum?

Um die Behandlung der Aufgabe formal zu vereinfachen, führen wir an Stelle der Koeffizienten μ neue Größen M durch folgende Erklärung ein:

$$\tag{3} \begin{aligned} \mathsf{M}_k &= -\frac{\mu_k}{|\mu_0|^2 + |\mu_1|^2 + \ldots + |\mu_{m-1}|^2} \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1), \\ \mathsf{M}_{k'} &= \frac{\mu_{k'}}{|\mu_m|^2 + |\mu_{m+1}|^2 + \ldots + |\mu_n|^2} \quad (k' = m, \ldots, n). \end{aligned}$$

Es ist dann

$$|\mathsf{M}_0|^2 + \ldots + |\mathsf{M}_{m-1}|^2 = \frac{1}{|\mu_0|^2 + \ldots + |\mu_{m-1}|^2},$$

$$|\mathsf{M}_m|^2 + \ldots + |\mathsf{M}_n|^2 = \frac{1}{|\mu_m|^2 + \ldots + |\mu_n|^2},$$

und daher gelten auch die Umkehrformeln:

$$\tag{3'} \begin{aligned} \mu_k &= -\frac{\mathsf{M}_k}{|\mathsf{M}_0|^2 + \ldots + |\mathsf{M}_{m-1}|^2} \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1), \\ \mu_{k'} &= \frac{\mathsf{M}_{k'}}{|\mathsf{M}_m|^2 + \ldots + |\mathsf{M}_n|^2} \quad (k' = m, \ldots, n), \end{aligned}$$

$$s = \frac{|\mathsf{M}_0|^2 + \ldots + |\mathsf{M}_{m-1}|^2}{|\mathsf{M}_m|^2 + \ldots + |\mathsf{M}_n|^2}. \tag{3''}$$

---

[2]) Siehe Math. Zeitschr. **1** (1918), S. 286.

Ist

$$L(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_n x^n$$

ein weiteres Polynom höchstens n-ten Grades, so werde die lineare Verbindung $M(x) + \varrho L(x)$ mit von x unabhängigem Parameter ϱ als *Kombination* von M mit L bezeichnet. Dem Parameter ϱ können dabei beliebige reelle oder komplexe Werte beigelegt werden.

Wir bilden den Ausdruck $s(M + \varrho L)$ für das kombinierte Polynom. Es berechnet sich:

$$(4) \qquad s(M + \varrho L) - s(M) = l\,[(\varrho \bar{\Delta} + \bar{\varrho} \Delta) + |\varrho|^2 D],$$

wo

$$l = \frac{|\mu_m|^2 + \ldots + |\mu_n|^2}{|\mu_0 + \varrho \lambda_0|^2 + \ldots + |\mu_{m-1} + \varrho \lambda_{m-1}|^2},$$

$$(4') \qquad \begin{aligned} \Delta(M, L) &= \lambda_0 \mathsf{M}_0 + \ldots + \bar{\lambda}_{m-1} \mathsf{M}_{m-1} + \bar{\lambda}_m \mathsf{M}_m + \ldots + \bar{\lambda}_n \mathsf{M}_n, \\ D(M, L) &= \frac{|\lambda_m|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2}{|\mu_m|^2 + \ldots + |\mu_n|^2} \quad \frac{|\lambda_0|^2 + \ldots + |\lambda_{m-1}|^2}{|\mu_0|^2 + \ldots + |\mu_{m-1}|^2}. \end{aligned}$$

Wird noch

$$(4'') \qquad \varrho = |\varrho| e^{i\beta}, \quad \Delta = |\Delta| e^{i\gamma}$$

gesetzt, so ist also

$$(4''') \qquad s(M + \varrho L) - s(M) = l\,[2\,|\varrho|\,|\Delta| \cos(\beta - \gamma) + |\varrho|^2 D].$$

Wenn M Minimumpolynom ist und $M + \varrho L$ mindestens m Nullstellen in dem Kreise k besitzt[3]), muß die linke Seite positiv sein. Daher das Ergebnis:

Wenn für alle ϱ von genügend kleinem Betrag die Kombination $M + \varrho L$ in k mindestens m Nullstellen hat, dann gilt:

$$(5) \qquad \Delta(M, L) = 0, \quad D(M, L) \geqq 0.$$

Denn wäre Δ von Null verschieden, so hätte für genügend kleines $|\varrho|$ die rechte Seite von $(4''')$ das Vorzeichen von $\cos(\beta - \gamma)$, das durch Wahl von β negativ gemacht werden kann. $D \geqq 0$ ist aber nichts anderes als der formelmäßige Ausdruck der Minimumseigenschaft selbst.

Mit Hilfe dieses Ergebnisses beweise ich zuerst:

Die sämtlichen Nullstellen eines Minimumpolynoms liegen auf der Peripherie des Kreises k.

Seien nämlich $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ m Nullstellen von $M(x)$ in k, von denen beim Vorhandensein mehrfacher Verschwindungspunkte auch einige zusammenfallen können, und sei α_1 *im Innern* des Kreises gelegen. Wir

[3]) „In dem Kreise" bedeutet ständig „im Innern oder auf dem Rande".

bilden das Polynom $(m-1)$-ten Grades $L(x)$, das die Nullstellen $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ besitzt. Dann hat für alle genügend kleinen ϱ die Kombination $M + \varrho L$ mindestens m Nullstellen in k, nämlich die Nullstellen $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ und eine Nullstelle α', die bei genügend kleinem ϱ in beliebiger Nähe von α_1 gelegen ist. Daher müßte nach (5) sicher $D(M, L) \geqq 0$ sein. Dies ist aber nicht der Fall, denn $\lambda_m = \ldots = \lambda_n = 0$, während $\mu_m, \ldots, \mu_n$ einerseits, $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}$ andererseits sicher nicht sämtlich verschwinden.

Ich beweise weiter:

Ein Minimumpolynom hat genau m Nullstellen in k.

Es sei nämlich jetzt $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ eine Gruppe von m Nullstellen von $M(x)$ in k, von denen auch wieder beim Vorhandensein höherer Multiplizitäten einige oder alle in einen Punkt zusammenfallen können. Es sei $L(x)$ das Polynom m-ten Grades, das diese Nullstellen besitzt. Wir kombinieren $M(x)$ der Reihe nach mit den Polynomen

$$L(x),\ x L(x),\ \ldots,\ x^{n-m} L(x)$$

und benutzen die aus (5) fließenden $n - m + 1$ Gleichungen

$$(5') \qquad \Delta(M, L) = 0,\ \Delta(M, xL) = 0,\ \ldots,\ \Delta(M, x^{n-m} L) = 0.$$

Sie lauten:

$$(6) \qquad \bar\lambda_0 \mathsf{M}_l + \bar\lambda_1 \mathsf{M}_{l+1} + \ldots + \bar\lambda_m \mathsf{M}_{l+m} = 0 \quad (l = 0, 1, \ldots, n-m).$$

Es berechnen sich also sämtliche Ausdrücke M aus den m ersten $\mathsf{M}_0, \ldots, \mathsf{M}_{m-1}$ mittels einer Rekursionsformel m-ter Ordnung mit kon stanten Koeffizienten. Das allgemeine Integral dieser Rekursionsformel ist bekanntlich:

$$(7) \qquad \mathsf{M}_i = A_1 \bar\alpha_1^i + A_2 \bar\alpha_2^i + \ldots + A_m \bar\alpha_m^i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Denn die Gleichung

$$\bar L(x) = \bar\lambda_0 + \bar\lambda_1 x + \ldots + \bar\lambda_m x^m = 0$$

hat die Wurzeln $\bar\alpha_1, \bar\alpha_2, \ldots, \bar\alpha_m$. Falls mehrere dieser Wurzeln zusammenfallen, ist die Darstellung (7) in bekannter Weise abzuändern. Die A_k sind von i unabhängig.

Wenn $M(x)$ mehr als m Wurzeln in k hat und diese nicht alle in einem Punkte zusammenfallen, so gibt es eine von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_m)$ verschiedene Wurzelgruppe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta)$, auf die wir die obigen Schlüsse anwenden können. Wir erhalten dann eine zweite Darstellung:

$$(7\text{a}) \qquad \mathsf{M}_i = B_1 \bar\alpha_1^i + \ldots + B_{m-1} \bar\alpha_{m-1}^i + B_m \bar\beta^i.$$

Es werde

$$A_k - B_k = C_k \qquad (k = 1, \ldots, m-1),$$
$$A_m = C_m, \quad -B_m = C_{m+1}$$

gesetzt. Dann ergeben sich durch Vergleich von (7) und (7a) für die C_k die $n+1$ linear-homogenen Gleichungen.

$$C_1\bar{\alpha}_1^i + C_2\bar{\alpha}_2^i + \ldots + C_{m-1}\bar{\alpha}_{m-1}^i + C_m\bar{\alpha}_m^i + C_{m+1}\bar{\beta}^i = 0 \qquad (i = 0, \ldots, n). \tag{7b}$$

Wir greifen die $m+1$ ersten dieser Gleichungen heraus. Ihre Determinante verschwindet nicht. Denn, falls alle α_k voneinander und von β verschieden sind, ist sie das Differenzenprodukt der $\bar{\alpha}_k$, $\bar{\beta}$; falls aber zusammenfallende Wurzeln vorkommen, berechnet sie sich aus dem Differenzenprodukt durch Differentiation und ist wieder gleich einem Produkt von Null verschiedener Wurzeldifferenzen, multipliziert mit einem Zahlenfaktor. Also liefern die Gleichungen (7b)

$$C_1 = \ldots = C_{m+1} = 0,$$

d. h. insbesondere

$$A_m = 0, \quad B_m = 0.$$

Die M_i gestatten also eine Darstellung durch nur $m-1$ Punkte $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{m-1}$. Ist

$$L'(x) = \lambda_0' + \lambda_1' x + \ldots + \lambda_{m-1}' x^{m-1}$$

die Gleichung, deren Wurzeln die $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ sind, so bestehen auch die Rekursionen

$$\bar{\lambda}_0' \mathsf{M}_l + \bar{\lambda}_1' \mathsf{M}_{l+1} + \ldots + \bar{\lambda}_{m-1}' \mathsf{M}_{l+m-1} = 0.$$

Es ist also insbesondere

$$\Delta(M, L') = 0,$$

und daher für alle Werte von ϱ

$$s(M + \varrho L') - s(M) = |\varrho|^2 D(M, L').$$

Hierin ist D negativ, weil L' vom Grade $m-1$ ist. Nun läßt sich aber ϱ unter allen Umständen so bestimmen, daß $M + \varrho L'$ außer den $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ noch eine Nullstelle in k hat. Demnach kann M nicht Minimumpolynom sein.

Es ist also bewiesen, daß ein Minimumpolynom jedenfalls nicht mehr als m Nullstellen haben kann, die sich auf mehrere Punkte verteilen.

Zur Vervollständigung des Beweises ist zu zeigen, daß auch keine einzelne Nullstelle von höherer Multiplizität als m auftreten kann.

Hierzu kombinieren wir $M(x)$ mit $xM'(x)$, wo $M'(x)$ die Ableitung von M ist. Wenn α eine mindestens $(m+1)$-fache Nullstelle von M ist, dann hat $M'(x)$ und daher auch $M + \varrho x M'$ in α eine mindestens m-fache Nullstelle. Daher müßte nach (5)

$$\Delta(M, xM') = 0$$

sein. In Wahrheit ist, wie sofort gezeigt werden wird, $\Delta(M, xM')$ positiv und von Null verschieden. Dadurch ist die Annahme einer Null-

stelle von höherer Multiplizität als m widerlegt. Unsere Behauptung über $\varDelta(M, xM')$ wird aber einfach durch Rechnung bewiesen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}\varDelta(M, xM') &= 0\cdot\bar{\mu}_0 \mathsf{M}_0 + 1\cdot\bar{\mu}_1 \mathsf{M}_1 + 2\cdot\bar{\mu}_2 \mathsf{M}_2 + \dots + n\cdot\bar{\mu}_n \mathsf{M}_n \\ &= -\frac{0\cdot\bar{\mu}_0\mu_0 + 1\cdot\bar{\mu}_1\mu_1 + \dots + (m-1)\bar{\mu}_{m-1}\mu_{m-1}}{\mu_0\mu_0 + \dots + \mu_{m-1}\mu_{m-1}} + \frac{m\bar{\mu}_m\mu_m + \dots + n\mu_n\bar{\mu}_n}{\mu_m\bar{\mu}_m + \dots + \mu_n\bar{\mu}_n} \\ &= \frac{\sum\limits_{k'=m}^{n}\sum\limits_{k=0}^{m-1}(k'-k)\mu_k\mu_k\mu_{k'}\bar{\mu}_{k'}}{\sum\limits_{k'=m}^{n}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\mu_k\bar{\mu}_k\mu_{k'}\bar{\mu}_{k'}} > 1.\end{aligned}$$

2. Die charakteristische Gleichung.

Es fragt sich nun, welche Verteilung der Nullstellen auf der Kreisperipherie ein Minimumpolynom liefert, und wie sich dieses Polynom und das Minimum berechnen. Leider kann ich diese Frage noch nicht vollständig beantworten, doch will ich zwei Gedankengänge angeben, durch deren Kombination die Lösung sich wenigstens in aussichtsvollen Sonderfällen finden ließ.

Die erste Entwicklung bezieht sich auf die *Aufstellung des Minimumpolynoms bei gegebenen Nullstellen* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, sie kommt auf die Lösung einer „charakteristischen Gleichung" hinaus und verläuft völlig analog der bei trigonometrischen Polynomen verwandten[4]). Ich kürze daher die Darstellung erheblich ab.

Bei gegebenen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sind die M_i zu rechnen nach den Formeln

$$(7) \qquad \mathsf{M}_i = A_1\bar{\alpha}_1^i + \dots + A_m\bar{\alpha}_m^i \qquad (i = 0, 1, \dots, m).$$

Zur Bestimmung der $A_1, \dots, A_m$ dienen die m Gleichungen

$$M(\alpha_l) = 0,$$

die sich unter Benutzung der Formeln $(3')$ und des Wertes $(3'')$ nun so schreiben lassen:

$$(8) \quad -(\mathsf{M}_0\alpha_l^0 + \mathsf{M}_1\alpha_l^1 + \dots + \mathsf{M}_{m-1}\alpha_l^{m-1}) + s(\mathsf{M}_m\alpha_l^m + \dots + \mathsf{M}_n\alpha_l^n) = 0 \text{ [5])} \\ (l = 1, \dots, m).$$

Multiplizieren wir die l-te Gleichung mit $\bar{A}_l$ und addieren alle Gleichungen, so kommt wegen (7)

$$(9) -(\mathsf{M}_0\bar{\mathsf{M}}_0 + \mathsf{M}_1\bar{\mathsf{M}}_1 + \dots + \mathsf{M}_{m-1}\bar{\mathsf{M}}_{m-1}) + s(\mathsf{M}_m\bar{\mathsf{M}}_m + \dots + \mathsf{M}_n\bar{\mathsf{M}}_n) = 0,$$

[4]) Math. Zeitschr. 1 (1918), S. 292–296.

[5]) Diese ganze Rechnung wird der einfachen Schreibweise halber so angestellt, als ob die Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ alle voneinander verschieden seien. Bei zusammenfallenden Wurzeln treten an Stelle einiger Gleichungen (8) ihre Ableitungen. Die Rechnung und ihre Ergebnisse aber bleiben ungeändert.

d. h. der Wert $(3'')$ von s. Unsere Aufgabe, das Gleichungssystem $(3'')$, (7), (8) für M_i, A_k, s zu lösen, reduziert sich also darauf, daß nur die $n+m$ Gleichungen (7), (8) für die $n+m$ Unbekannten M_i, A_k *mit s als Parameter* zu lösen sind; dann ist $(3'')$ von selbst erfüllt.

Man hat daher folgende Lösungsmethode für das Gleichungssystem: *Man setze in die Gleichungen* (8) *aus* (7) *ein und erhalte dadurch m linear-homogene Gleichungen für die m Unbekannten A_k. Die Bedingung dafür, daß diese Gleichungen durch nicht verschwindende Werte der A_k befriedigt werden, ist eine Determinantengleichung in s*

$$W(s) = 0,$$

die „charakteristische Gleichung".

Die charakteristische Gleichung hat nur positiv reelle Wurzeln. Der zu dem gegebenen Nullstellensystem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ gehörige Minimalwert s ist die kleinste Wurzel dieser Gleichung.

Das Polynom $M(x)$ mit den Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, das den Minimalwert s liefert, ist bis auf einen Zahlenfaktor eindeutig bestimmt.

Die Beweise dieser Sätze sind in meiner Arbeit über trigonometrische Polynome in der Mathematischen Zeitschrift vollständig gegeben.

Die charakteristische Gleichung soll explizit aufgestellt werden. Dazu setzen wir, für $(l = 1, \ldots, m)$,

$$(10)\qquad \alpha_l^i = a_l^{(i)}\ (i = 0, \ldots, n), \qquad \begin{aligned} -\alpha_l^p &= b_l^{(p)}\ (p = 0, \ldots, m-1) \\ s\,\alpha_l^q &= b_l^{(q)}\ (q = m, \ldots, n). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (7) und (8) schreiben sich dann

$$(7')\qquad M_i = a_1^{(i)} A_1 + \ldots + a_m^{(i)} A_m \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

$$(8')\qquad b_l^{(0)} M_0 + b_l^{(1)} M_1 + \ldots + b_l^{(n)} M_n = 0 \qquad (l = 1, \ldots, m).$$

Eliminiert man die M_i, so ergeben sich die m linear-homogenen Gleichungen in den A_k:

$$(10')\qquad \begin{aligned} &c_{1l} A_1 + \ldots + c_{ml} A_m = 0, \\ &c_{kl} = a_k^{(0)} b_l^{(0)} + a_k^{(1)} b_l^{(1)} + \ldots + a_k^{(n)} b_l^{(n)} \qquad (k, l = 1, \ldots, m). \end{aligned}$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$|c_{kl}| = 0.$$

Vermöge der Form $(10')$ der c_{kl} läßt sich die Determinante nach dem verallgemeinerten Multiplikationssatz der Determinanten entwickeln:

$$(10'')\qquad |c_{kl}| = \sum |a_1^{(i_1)} a_2^{(i_2)} \ldots a_m^{(i_m)}| \cdot |b_1^{(i_1)} b_2^{(i_2)} \ldots b_m^{(i_m)}|,$$

wo die Summe über alle möglichen in der natürlichen Zahlenfolge geordneten m-gliedrigen Gruppen der $n+1$ Indizes $0, 1, \ldots, n$ zu erstrecken ist.

Wir bezeichnen in der Folge immer mit p einen Index der Reihe $0, 1, \ldots, m-1$, mit q einen Index der Reihe $m, \ldots, n$. Gemäß (10) enthält $|b_1^{(i_1)} b_2^{(i_2)} \ldots b_m^{(i_m)}|$ so viele Faktoren s als Indizes q unter den $i_1, i_2, \ldots, i_m$ vorkommen. Hierdurch läßt sich die rechte Seite von (10″) nach Potenzen von s ordnen. Es kommt, wenn für die a, b ihre Werte (10) eingetragen werden:

$$
\begin{aligned}
|c_{kl}| = {} & (-1)^m |\alpha_1^0 \alpha_2^1 \ldots \alpha_m^{m-1}| \, |\bar{\alpha}_1^0 \bar{\alpha}_2^1 \ldots \bar{\alpha}_m^{m-1}| \\
& + (-1)^{m-1} s \sum |\alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_{m-1}^{p_{m-1}} \alpha_m^{q_1}| \, |\bar{\alpha}_1^{p_1} \ldots \bar{\alpha}_{m-1}^{p_{m-1}} \bar{\alpha}_m^{q_1}| \\
& + (-1)^{m-2} s^2 \sum |\alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_{m-2}^{p_{m-2}} \alpha_{m-1}^{q_1} \alpha_m^{q_2}| \, |\bar{\alpha}_1^{p_1} \ldots \bar{\alpha}_{m-2}^{p_{m-2}} \bar{\alpha}_{m-2}^{q_1} \bar{\alpha}_m^{q_2}| \\
& + \cdots
\end{aligned}
$$

Diese Entwicklung ist ganz analog der bei trigonometrischen Polynomen angegebenen.

Da die Punkte α alle auf dem Kreise k vom Radius r liegen, schreiben wir

$$
\alpha_h = r \varepsilon_h, \quad |\varepsilon_h| = 1, \tag{11}
$$

außerdem gebrauchen wir die Abkürzungen

$$
\{p_1, \ldots, p_k;\ q_1, \ldots, q_l\} = \frac{\left|\varepsilon_1^{p_1} \varepsilon_2^{p_2} \ldots \varepsilon_k^{p_k} \varepsilon_{k+1}^{q_1} \ldots \varepsilon_m^{q_l}\right|}{\left|\varepsilon_1^0 \varepsilon_2^1 \ldots \varepsilon_m^{m-1}\right|} \qquad (k + l = m). \tag{12}
$$

Damit kann der charakteristischen Gleichung folgende Form gegeben werden:

$$
\begin{aligned}
W(s) = 1 - s \sum |\{p_1, \ldots, p_{m-1};\ q_1\}|^2 r^{2(q_1 - p')} & \\
+ s^2 \sum |\{p_1, \ldots, p_{m-2};\ q_1, q_2\}|^2 r^{2(q_1 + q_2 - p' - p'')} + \ldots = 0, &
\end{aligned} \tag{13}
$$

wo die mit oberen Strichen versehenen Indizes $p', p'', \ldots$ die in der Reihe der Indizes $p_1, \ldots, p_k$ fehlenden Zahlen $0, 1, \ldots, m-1$ bezeichnen sollen, und die Summen immer über alle möglichen Indizes-Kombinationen zu erstrecken sind. Das Polynom $W(s)$ ist vom Grade $n - m + 1$, wenn diese Zahl kleiner ist als m, sonst vom Grade m.

Von den Klammerausdrücken $\{p_1, \ldots, p_k;\ q_1, \ldots, q_l\}$ zeigt man ohne große Schwierigkeit, daß sie ganze symmetrische Funktionen der ε_h, und zwar Summen von Potenzprodukten mit nur positiven Koeffizienten sind*). Sie haben demnach ihre absolut größten Werte, wenn alle ε_h einander gleich sind, d. h. wenn sämtliche Wurzelpunkte zusammenfallen. Diese größten Werte sind, wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_m = 1$ gesetzt wird,

---

*) Für die formale Berechnung der Klammergrößen aus den elementar-symmetrischen Funktionen siehe E. Pascal, Die Determinanten (Leipzig, Teubner, 1900), § 33.

$$(14) \qquad \{p_1, \ldots, p_k;\ q_1, \ldots, q_l\} = \frac{\prod\limits_{\lambda,\mu}(p_\mu - p_\lambda) \prod\limits_{\nu,\varrho}(q_\varrho - p_\nu) \prod\limits_{\sigma,\tau}(q_\tau - q_\sigma)}{1!\,2!\ldots(m-1)!}$$

$$\begin{cases} \mu, \lambda, \nu = 0, 1, \ldots, m-1;\ \lambda < \mu, \\ \varrho, \sigma, \tau = m, \ldots, n;\ \sigma < \tau. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich eine untere Grenze für die kleinste Wurzel s der charakteristischen Gleichung, d. h. für das gesuchte Minimum. Da nämlich für jede Gleichung der Form

$$1 - c_1 s + c_2 s^2 - + \ldots = 0$$

mit lauter reellen positiven Wurzeln die Wurzeln $\geqq \frac{1}{c_1}$ sind, so ist

$$(15) \qquad s \geqq s_0 = \frac{1}{\sum |\{p_1, \ldots, p_{m-1}; q_1\}|^2 r^{2(q_1 - p')}},$$

wo für die Klammergrößen die Werte (14) zu wählen sind. Das Gleichheitszeichen gilt in den beiden trivialen Fällen $m = 1$ und $n = m$, in denen die Gleichung vom ersten Grade wird.

Die vollständige Lösung des Minimumproblems erfordert jetzt die Bestimmung derjenigen Größen $\varepsilon_h = e^{i\varphi_h}$ bzw. derjenigen Verhältnisse $\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_1}$ (denn ε_1 ist wegen der Rotationssymmetrie willkürlich), für die die charakteristische Gleichung eine möglichst kleine Wurzel hat. Für diese Verhältnisse bestehen natürlich $m-1$ durch Differentiation von (13) nach den $m-1$ Winkeldifferenzen $\varphi_h - \varphi_1$ gewonnene Gleichungen. Doch scheint es nicht, als ob ihre Diskussion förderlich wäre. Vielmehr werden wir uns bessere Bedingungen für die Lage der Punkte ε_h auf einem direkten Wege verschaffen.

3. Eine weitere Eigenschaft der Minimumpolynome.

Sei α_1 eine genau k-fache Nullstelle des Minimumpolynoms auf dem Rande, so daß

$$(16) \quad M(x) = (x - \alpha_1)^k R(x) P(x) = \mu (x - \alpha_1)^k + \text{Glieder höh. Ordnung},$$

wo $R(x)$ die von α_1 verschiedenen Nullstellen des $M(x)$ auf dem Rande, $P(x)$ die Nullstellen außerhalb des Kreises umfaßt, und $\mu = R(\alpha_1) P(\alpha_1)$ von Null verschieden ist. Es gibt Polynome $L_{\alpha_1}(x)$ höchstens n-ten Grades, die in α_1 von genau $(k-1)$-ter Ordnung verschwinden, alle übrigen Nullstellen in dem Kreise mit M gemein haben und außerdem die Eigenschaft besitzen, daß $D(M, L_{\alpha_1}) < 0$. Ein solches Polynom ist beispielsweise $(x - \alpha_1)^{k-1} R(x)$. Wir setzen allgemein L_{α_1} in der Form an:

$$(17) \quad L_{\alpha_1}(x) = (x - \alpha_1)^{k-1} R(x) Q(x) = \lambda (x - \alpha_1)^{k-1} + \text{Glieder höh. Ordn.},$$

wo $Q(x)$ ein geeignetes, bei α_1 nicht verschwindendes Polynom vom Maximalgrad $n-m+1$, also $\lambda = R(\alpha_1)Q(\alpha_1)$ von Null verschieden ist.

Wir bilden die Kombination $M(x) + \varrho L_{\alpha_1}(x)$. Der Ausdruck (4′) $\Delta(M, L_{\alpha_1})$ ist von Null verschieden, weil sonst wegen $D(M, L_{\alpha_1}) < 0$ nach (4‴) M nicht Minimumpolynom wäre. Denn ϱ läßt sich sicher so bestimmen, daß die Kombination m Nullstellen in dem Kreise hat.

$\Delta(M, L_{\alpha_1})$ hat also ein bestimmtes Argument γ, und wir wählen ϱ so, daß sein Argument sich von γ um einen Rechten unterscheidet:

$$(18) \qquad \beta = \gamma + \frac{(2\nu+1)\pi}{2} \qquad (\nu \text{ ganz}).$$

Dann liefert (4‴):

$$(18') \qquad s(M + \varrho L_{\alpha_1}) - s(M) = l\,|\varrho|^2 D < 0,$$

und demgemäß darf die Kombination für die gewählten Werte von ϱ *höchstens* $m-1$ *Nullstellen in dem Kreise haben, d. h. die einzige durch die Kombination verschobene Nullstelle bei* α_1 *muß aus dem Kreis herausrücken.*

Nun gilt für die Verschiebung der Nullstelle bei genügend kleinem $|\varrho|$ in erster Näherung

$$(19) \quad \alpha - \alpha_1 = -\frac{\lambda}{\mu}\varrho = -\frac{\lambda}{\mu}|\varrho|\, e^{i\left(\gamma + \frac{(2\nu+1)\pi}{2}\right)} = -e^{i\frac{(2\nu+1)\pi}{2}} \frac{|\varrho|}{|\Delta|} \frac{Q(\alpha_1)}{P(\alpha_1)} \Delta(M, L_{\alpha_1})$$

nach (18), (16), (17). Wenn die durch (19) bei variablem $|\varrho|$ dargestellte Gerade den Kreis schnitte, würde entweder für $\nu = 0$ oder $\nu = 1$ der m-te Wurzelpunkt α der Kombination in dem Kreise liegen. Dies darf nicht stattfinden, daher: *Die Gerade* (19) *ist Tangente an den Kreis.* D. h. in Formeln:

$$(20) \qquad \Delta(M, L_{\alpha_1}) \frac{Q(\alpha_1)}{\alpha_1 P(\alpha_1)} = \text{reell}.$$

Diese Beziehung, die bisher nur für solche $Q(x)$ bewiesen ist, die $D(M, L_{\alpha_1}) < 0$ machen, *gilt* nun *für alle Polynome* $Q(x)$ *von dem Maximalgrad* $n-m+1$. Dies ist eine wichtige neue Eigenschaft der Minimumpolynome.

Beim Beweise betrachten wir zur Vereinfachung der Schreibweise zuerst Polynome $Q(x)$, die am Nullpunkt nicht verschwinden. Seien $B_1, \ldots, B_{n-m+1}$ beliebige Konstante, σ ein reeller positiver Parameter, so setzen wir

$$Q_\sigma(x) = 1 + \sigma(B_1 x + \ldots + B_{n-m+1} x^{n-m+1}).$$

Werden außerdem die Bezeichnungen gebraucht:

$$(x-\alpha_1)^{k-1} R(x) = \nu_0 + \nu_1 x + \ldots + \nu_{m-1} x^{m-1},$$

$$L_{\alpha_1,\sigma}(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_n x^n,$$

so ist

$$\lambda_h = \nu_h + \sigma_h \qquad (h \leqq m-1),$$
$$\lambda_{h'} = \sigma_{h'} \qquad (m \leqq h' \leqq n),$$

wo die Glieder σ_h, $\sigma_{h'}$ den Parameter σ als Faktor enthalten und im übrigen linear in den ν und den B sind. Demnach ist die Funktion $D(M, L_{\alpha_1 .. \sigma})$ oder, was auf dasselbe herauskommt, die Funktion

$$\frac{|\lambda_m|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2}{|\lambda_0|^2 + \ldots + |\lambda_{m-1}|^2} - \frac{|\mu_m|^2 + \ldots + |\mu_n|^2}{|\mu_0|^2 + \ldots + |\mu_{m-1}|^2}$$

für genügend kleine σ sicher negativ, denn der zweite Quotient ist nach (15) größer als s_0, in dem ersten Quotienten aber geht der Zähler mit σ gegen Null, während der Nenner sich der $\Sigma|\nu_h|^2$ nähert.

Die Beziehung (20) gilt also für alle genügend kleinen σ. Es ist aber der imaginäre Teil der linken Seite dieser Beziehung eine quadratische Funktion von σ und muß also für alle Werte von σ verschwinden, da er für genügend kleine σ verschwindet. Die Beziehung (20) gilt also auch für $\sigma = 1$, d. h. für das beliebige, am Nullpunkt nicht verschwindende Polynom

$$Q(x) = 1 + B_1 x + \ldots + B_{n-m+1} x^{n-m+1}.$$

Die Beschränkung, daß $Q(x)$ am Nullpunkt nicht verschwinden soll, läßt sich auch leicht beseitigen. Damit ist die Beziehung (20) allgemein bewiesen.

Wir wenden sie nun an auf $Q(x) = P(x)$, d. h. auf $L_{\alpha_1}(x) = \frac{M(x)}{x - \alpha_1}$. Es ist dann:

$$(21)\qquad L_{\alpha_1}(x) = -\frac{1}{\alpha_1}\Big[\mu_0 + \Big(\frac{\mu_0}{\alpha_1} + \mu_1\Big)x + \Big(\frac{\mu_0}{\alpha_1^2} + \frac{\mu_1}{\alpha_1} + \mu_2\Big)x^2 + \ldots + \Big(\frac{\mu_0}{\alpha_1^{n-1}} + \frac{\mu_1}{\alpha_1^{n-2}} + \ldots + \mu_{n-1}\Big)x^{n-1}\Big]$$

und also

$$\Delta(M, L_{\alpha_1}) = -\frac{1}{\bar\alpha_1}\Big[\bar\mu_0 \mathsf{M}_0 + \Big(\frac{\bar\mu_0}{\bar\alpha_1} + \bar\mu_1\Big)\mathsf{M}_1 + \ldots + \Big(\frac{\bar\mu_0}{\bar\alpha_1^{n-1}} + \frac{\bar\mu_1}{\bar\alpha_1^{n-2}} + \ldots + \bar\mu_{n-1}\Big)\mathsf{M}_{n-1}\Big].$$

Ordnet man nach den $\bar\mu_k$ und berücksichtigt (3′) und (3″), so wird die Gleichung (20) zu

$$(22)\qquad \begin{aligned} -\Big[\bar{\mathsf{M}}_0\Big(\mathsf{M}_0 + \ldots + \frac{\mathsf{M}_{n-1}}{\bar\alpha_1^{n-1}}\Big) + \bar{\mathsf{M}}_1\Big(\mathsf{M}_1 + \ldots + \frac{\mathsf{M}_{n-1}}{\bar\alpha_1^{n-2}}\Big) \\ + \ldots + \bar{\mathsf{M}}_{m-1}\Big(\mathsf{M}_{m-1} + \ldots + \frac{\mathsf{M}_{n-1}}{\bar\alpha_1^{n-m}}\Big)\Big] \\ + s\Big[\mathsf{M}_m\Big(\mathsf{M}_m + \ldots + \frac{\mathsf{M}_{n-1}}{\bar\alpha_1^{n-m-1}}\Big) + \ldots + \bar{\mathsf{M}}_{n-1}\mathsf{M}_{n-1}\Big] = \text{reell}. \end{aligned}$$

Hierin werden schließlich die Ausdrücke (7) der M_i durch die A_k eingetragen, *dann ist* (22) *eine quadratische Gleichung für die Real- und Imaginärteile der* A_k, *in deren Koeffizienten die Wurzelverhältnisse* $\frac{\alpha_\nu}{\alpha_1}$ $(\nu = 2, \ldots, n)$ *und ihre Konjugierten eingehen*[7]).

Für jede der voneinander verschiedenen Nullstellen besteht eine Gleichung (22). Eine von diesen ist von den übrigen abhängig. Fügt man diese Gleichungen zu den Gleichungen (10) hinzu, so liegt ein System von Gleichungen in richtiger Anzahl vor, aus dem die Unbekannten A_k, s, $\frac{\alpha_\nu}{\alpha_1}$ berechnet werden müssen.

Es ist mir zwar noch nicht gelungen, diese Elimination so weit zu führen, daß ich daraus allgemeine Schlüsse über die Lage der Nullstellen ziehen könnte. Jedoch habe ich folgendes Ergebnis sichergestellt: *Im Falle zweier Nullstellen* $(m = 2)$ *sind die Nullstellen des Minimumpolynoms sowohl bei genügend großen wie bei genügend kleinen Werten des Kreisradius* r *in einem Punkte konzentriert.*

Es ist mir außerordentlich wahrscheinlich, daß das gleiche Resultat auch bei beliebigem m gilt. Dagegen weiß ich nicht, ob es auch für allgemeine Werte des Kreisradius richtig ist. Soweit seine Richtigkeit reicht, besteht über die Minimumpolynome eine vollständige und einfache Aussage: *Es gibt* — abgesehen von offensichtlichen und belanglosen Abänderungsmöglichkeiten — *nur ein einziges Minimumpolynom, seine in* k *gelegenen Nullstellen fallen im Punkte* $x = r$ *zusammen, und der Minimalwert von* s *genügt der charakteristischen Gleichung* (13), *in der die Klammerausdrücke die Werte* (14) *haben.*

Dezember 1921.

---

[7]) Wenn man für $Q(x)$ der Reihe nach die Potenzen $1, x, x^2, \ldots, x^{n-m+1}$ einsetzt, erhält man an Stelle der einen Gleichung (22) ein System von $n - m + 2$ Gleichungen. Diese sagen aber nicht mehr aus als die eine Gleichung (22), denn aus einer von ihnen und den Gleichungen (8) folgen alle übrigen.

(Eingegangen am 29. 12. 1921.)

Die Bewegungen der hyperbolischen Ebene.

Von

Heinrich Liebmann in Heidelberg.

Wählt man mit Klein die projektiven Axiome und die ihnen anzugliedernde Maßbestimmung zum Eingangstor der hyperbolischen Geometrie, so ist für diese Geometrie der folgende Satz leicht zu beweisen:

Außer den Bewegungen gibt es keine eigentlichen projektiven Transformationen der hyperbolischen Ebene.

Zur Erläuterung genügt folgendes: Unter „projektiver Transformation" (p. T.) ist eineindeutige Punkttransformation, die Gerade in Gerade überführt, zu verstehen. Wir verlangen ferner, daß jeder „eigentliche", d. h. jeder im Innern des Fundamentalkegelschnittes K_∞ gelegene Punkt P wieder in einen solchen Punkt übergeht; nun, so müssen die Punkte des K_∞ wieder in Punkte des K_∞ übergehen. Die achtgliedrige projektive Gruppe wird also durch die zweite Forderung auf die p. G. des K_∞ eingeschränkt, und diese Gruppe ist eben der Inbegriff der „Bewegungen" der Ebene bei hyperbolischer Maßbestimmung. —

Hilbert[1]), auf diesem Gebiete einmal als „Reaktionär" auftretend, hat die Metrik zum Ausgangspunkt gewählt und dabei gleich am Anfang durch *Konstruktion* gezeigt, daß zwei Gerade, die einander nicht schneiden (das Beiwort „eigentlich" ist hier zu unterdrücken) und nicht parallel sind (kein gemeinsames Ende P_∞ haben), notwendig ein gemeinsames Lot besitzen müssen.

Es soll jetzt der vorangestellte Satz durch elementargeometrische Überlegungen, also unter ausschließlicher Verwendung von Kongruenzsätzen, so abgeleitet werden, wie etwa Gauß, J. Bolyai oder Lobatschefskij dies ausgeführt haben könnten[2]).

---

[1]) Grundlagen der Geometrie, Anhang III.

[2]) Man gelangt bis zu den in Nr. 6, Folgerung 3 und 4, ausgesprochenen Sätzen.

1. *Eineindeutige Punkttransformationen* (P. T.), *die Gerade in Gerade überführen, müssen Parallele in Parallele überführen.*

Beweis. In der Tat kann ein Paar paralleler Halbstrahlen $g_1(P_1 P_\infty)$, $g_2(P_2 P_\infty)$ nicht in ein Paar einander schneidender Halbstrahlen übergehen; das schließt die *Definition* der P. T. aus. Aber auch ein Paar mit gemeinsamem Lot $L_1' L_2'$ kann daraus nicht hervorgehen; denn sonst entspräche rückwärts (bei Umkehr der P. T.) der eine der beiden von P_1' ausgehenden zu g_2' parallelen Halbstrahlen einem in das Gebiet $P_1 P_2 P_\infty$ bei P_1 eintretenden Halbstrahl, der g_2 nicht trifft, und das ist unmöglich.

2. *Der Mittelpunkt M_{12} eines l-Paares geht in den Mittelpunkt M_{12}' über.*

Beweis. Aus (1) folgt, daß bei der betrachteten P. T. jedes l-Paar von Geraden, d. h. jedes Paar von einander nicht schneidenden Geraden g_1, g_2 in ein ebensolches Paar übergeht, nicht in ein Parallelenpaar. Unter dem Mittelpunkt M_{12} eines solchen Paares wollen wir den Halbierungspunkt des nach Hilbert konstruierbaren gemeinsamen Lotes verstehen. Er ist aus Gründen der Symmetrie der Schnittpunkt der beiden Geraden (Parallelen), welche die „Enden“ von g_1 und g_2 kreuzweise verbinden und als solcher auch durch Parallelenkonstruktion definiert. Da es unter den vier Geraden, die mit g_1 und g_2 je ein Ende gemein haben, nur ein Paar, eben das durch M_{12} gehende gibt, das einen Punkt gemein hat, so muß dieses Paar in das entsprechende, also M_{12} in M_{12}' übergehen.

Hiermit ist noch nicht bewiesen, daß das gemeinsame Lot l_{12} von g_1 und g_2 in das gemeinsame Lot l_{12}' von g_1' und g_2' übergeht!

3. *Sind $AB = BC$ aneinanderschließende gleiche Strecken einer Geraden g, so ist auf g' entsprechend $A'B' = B'C'$.*

Beweis. Es seien g_1, g_2, g_3, g_4 vier Gerade, die alle auf derselben Geraden l senkrecht stehen und deren Spuren auf ihr die Strecken $l_{12} = l_{23} = l_{34}$ abschneiden. Es sei ferner die Mitte eines aus diesen vier Geraden ausgewählten Paares $g_i g_k$ mit M_{ik} bezeichnet. Hiernach fällt M_{14} mit M_{23} zusammen und außerdem ist $M_{12} M_{23} = M_{23} M_{34}$.

Dann muß nach (2) M_{14}' mit M_{23}' zusammenfallen, und es folgt weiter, daß $M_{12}', M_{23}', M_{34}'$ auf einer Geraden liegen, weil dies für M_{12}, M_{23}, M_{34} gilt. Diese Gerade braucht keineswegs mit l_{12}' zusammenzufallen, wohl aber ist die aus dem Dreieck $L_1' M_{14}' L_2'$ und den Geraden g_1', g_2' gebildete Figur (L_1', L_2' bedeuten die Fußpunkte der von $M_{14}' \equiv M_{23}'$ auf g_1' und g_2' gefüllten Lote) ihrer Scheitelfigur L_4', M_{14}', L_3'; g_4', g_3' kongruent. Demnach ist $M_{12}' M_{23}' = M_{23}' M_{34}'$.

Bei dieser Überlegung sind aber M_{12}, M_{23}, M_{34} gar keine irgendwie ausgezeichneten Punkte; man kann drei Punkte ABC auf einer Geraden,

wenn nur $AB = BC$ ist, immer als Lotmittelpunkte deuten, indem man die richtigen Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 einzeichnet:

Wenn also $AB = BC$, dann ist $A'B' = B'C'$.

4. *Jedes Viereck $ABCD$ mit gleichen Gegenseiten* (G.-S.-Viereck) $AB = CD$, $BC = DA$, *geht in ein gleichartiges Viereck* (mit $A'B' = C'D'$, $B'C' = D'A'$) *über.*

Beweis. Aus Kongruenzsätzen folgt, daß die Diagonalen eines solchen Vierecks einander halbieren und die Umkehrung. Anwendung von (3) ergibt dann die Richtigkeit von (4).

5. *Jedes gleichschenklige Dreieck ABC ($AB = AC$) geht in ein gleichschenkliges Dreieck über.*

Beweis. Hier muß, wie es scheint, etwas weiter ausgeholt werden, um (4) verwenden zu können. Dabei wird ein besonderes aus ABC abgeleitetes G.-S.-Viereck (Viereck mit gleichen Gegenseiten) ABB_1A_1 verwendet, das bei B und A_1 rechte Winkel besitzt; überdies soll A_1 auf der Halbierungslinie des Winkels A liegen. Es ist zunächst zu zeigen, wie man dieses Viereck zu konstruieren hat. Man konstruiert zunächst aus dem Winkel bei A $(= \frac{1}{2} \sphericalangle BAC)$ und AB das Viereck ABB_2A_2 mit rechten Winkeln bei B, A_2 und B_2,[3]) halbiert dann B_2A_2 und dreht die Figur um den Mittelpunkt durch den Winkel π, dann entsteht ein G.-S.-Viereck mit rechten Winkeln bei B und A_1.

Zu diesem G.-S.-Viereck ist noch das Spiegelbild ACC_1A_1 an AA_1 hinzuzufügen. In dieser Zwillingsfigur $BACC_1A_1B_1$ ist dann

$$BA = AC = A_1C_1 = A_1B_1 = AB$$

und

$$BB_1 = AA_1 = CC_1.$$

Ihr muß notwendig eine Zwillingsfigur entsprechen, in der gewiß nach (3)

$$B_1'A_1' = A_1'C_1',$$

und dann nach (4)

$$B'A' = B_1'A_1' = A_1'C_1' = A'C'.$$

Es ist also, wie behauptet wurde $A'B' = A'C'$.

Die Gleichheit der Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle B'A'C'$ ist damit noch nicht erwiesen, geschweige denn die Kongruenz der Dreiecke ABC und $A'B'C'$

6. *Folgerungen.* Hieraus ergeben sich eine Reihe von Folgerungen, die die P. T. der Kongruenz immer näher rücken.

---

[3]) Vgl. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, 2. Aufl. (im folgenden angeführt mit N. E. G.), Leipzig 1912, § 10.

F. 1: Jeder Kreis geht in einen Kreis über, der Mittelpunkt in den Mittelpunkt. Jeder einem Kreis einbeschriebene reguläre Sehnenzug geht in einen regulären Sehnenzug über (beides folgt aus Nr. 5).

F. 2: *Rechte Winkel bleiben unverändert.* — Dies ergibt sich durch Betrachtung eines Viereckes $ABCD$, in dem $AB = BC = CD = DA$ ist. In einem solchen Viereck schneiden die Diagonalen einander senkrecht, und da auch $A'B' = B'C' = C'D' = D'A'$, bleibt der Winkel ein rechter.

F. 3: Die Halbierungslinie eines Winkels geht in die Halbierungslinie über. — Trägt man nämlich auf den Schenkeln des Winkels α die Strecken $AB = AC$ ab und fällt das Lot AD auf BC, so ist AD die Halbierungslinie. Aus den invarianten Eigenschaften der Figur ergibt sich dann die Folgerung.

Aus F. 2 und F. 3 zusammen folgt, *daß jeder Winkel*

$$\alpha = \pi \cdot \frac{2m+1}{2^n}$$

ungeändert bleibt.

F. 4: Die Seite a des gleichseitigen Dreiecks mit den Winkeln $\frac{\pi}{4}$ bleibt ungeändert. Dies folgt aus F. 3 in Verbindung mit der Tatsache, daß jedes Dreieck durch die Winkel bestimmt ist[4]).

Man kann dann aus F. 3 die Invarianz einer abzählbaren Menge anderer Strecken folgern *oder direkt die Invarianz aller Strecken* (wegen Nr. 3)

$$a \cdot \frac{2m+1}{2^n}.$$

Um allgemein

$$AB = A'B'$$

zu beweisen, auch dann, wenn die Entfernung sich nicht in dieser Form ausdrücken läßt, braucht man entweder den Hilfssatz[5]): Sind AB zwei gegebene Punkte, so daß $AB < a$ ($AC = a$, B zwischen A und C), so ist für hinreichend großes n

$$AB > \frac{a}{2^n}, \text{ d. h. } B \text{ zwischen } A \text{ und } D, \; AD = \frac{a}{2^n};$$

oder man weist nach, daß die P. T. eine Kreisverwandtschaft ist, was in F. 5 geschehen soll. Da aber Kreisverwandtschaften winkeltreu sind[6]), so

---

[4]) N. E. G., S. 42.

[5]) Wie ordnet sich dieser Hilfssatz in das Axiomensystem ein? Der mit Anwendung dieses Hilfssatzes zu führende Beweis ist nicht kurz zusammenzufassen.

[6]) N. E. G., S. 48.

bleiben *alle* Winkel, nicht nur die in F. 3 angegebenen, erhalten und damit ist dann allgemein

$$AB = A'B'$$

erwiesen.

F. 5: *Die anderen Kreisformen* (vgl. F. 1). Die hyperbolische Geometrie kennt neben dem eigentlichen Kreis noch zwei andere Kurven mit einem Kontinuum von Symmetrieachsen, nämlich die *Abstandslinien*, Örter der Endpunkte von Strecken konstanter Länge l, die alle auf einer bestimmten Geraden der „Nullinie" senkrecht stehen. Daß bei unserer P. T. Abstandslinien wieder in Abstandslinien übergehen, folgt aus F. 2 in Verbindung mit dem Satz, *daß gleiche Strecken in gleiche Strecken übergehen*, was hier noch zu zeigen ist. In der Tat kann man, wenn $AB = CD$ ist, ein G.-S.-Viereck (Nr. 4) einschalten $ABCD_1$ ($AB = CD_1'$, $AC = BD_1$) und erkennt durch Abbildung der aus diesem Viereck und dem gleichschenkligen Dreieck CDD_1 ($CD = CD_1$) bestehenden Figur, daß $A'B' = C'D_1' = C'D'$ wird.

Es bleiben noch die *Grenzkreise* zu betrachten; sie sind dadurch charakterisiert, daß sämtliche Sehnen AB mit den durch die Endpunkte der Sehnen gelegten Strahlen eines bestimmten Parallelbüschels paarweise gleiche Winkel einschließen. Ist P_∞ das „Ende" dieses Büschels, so ist also für zwei Punkte $P_1 P_2$ des Grenzkreises

$$\sphericalangle P_2 P_1 P_\infty = \sphericalangle P_1 P_2 P_\infty .$$

Da die Mittelsenkrechte jeder Sehne ebenfalls P_∞ enthält, so folgt aus Nr. 3 in Verbindung mit F. 2, daß auch Grenzkreise in Grenzkreise übergehen.

Jeder Kreis geht in einen Kreis über, dabei bleibt die Art des Kreises (Kreis mit Mittelpunkt, Abstandslinie, Grenzkreis) *ungeändert.*

(Eingegangen am 29. 4. 1921.)

Hilbertsche und Beltramische Liniensysteme.

Ein Beitrag zur Nicht-Desarguesschen Geometrie.

Von

Hans Mohrmann in Basel.

I.

In seinen „Grundlagen der Geometrie" hat Hilbert ein elementares Linien-System in der Euklidischen Ebene angegeben, für das alle ebenen Axiome seines Axiomen-Systems erfüllt sind, außer dem Kongruenzaxiom für Dreiecke, der Satz des Desargues jedoch nicht gilt. Das Hilbertsche Liniensystem besteht aus allen Geraden der Ebene, soweit sie nicht in das Innere einer gewissen Ellipse eindringen, ergänzt — im Innern der Ellipse — durch die Bögen von Kreisen eines passend gewählten Netzes (∞^2-Systems mit einem (reellen) festen gemeinsamen Punkt).

Schließt man das Punkt-Kontinuum der Euklidischen (Cartesischen) Ebene in bekannter Weise durch Hinzufügung von ∞^1 uneigentlichen (unendlich-fernen) Punkten zu einem projektiven Kontinuum (*Trägergebilde eines ternären Gebietes*) ab, so hat das Hilbertsche Liniensystem mit dem System der Geraden der projektiven Ebene insbesondere die beiden folgenden Eigenschaften gemein:

1. irgend zwei (verschiedene) Punkte sind durch eine (und nur eine) Linie des Systems verbunden;
2. irgend zwei (verschiedene) Linien des Systems haben einen (und nur einen) Schnittpunkt.

Da gleichwohl Konstruktionen mittels vollständiger 4-Ecke zu drei (samt ihrer Reihenfolge) gegebenen Punkten nicht einen und denselben 4. harmonischen Punkt liefern (Nicht-Desarguessche Geometrie), so setzt das Hilbertsche Liniensystem mit elementaren Mitteln in Evidenz, daß zur Begründung der projektiven Geometrie der Ebene projektive Axiome (der Verknüpfung, Anordnung und Stetigkeit), analog denen, die zur Begründung der räumlichen projektiven Geometrie ausreichen, nicht genügen, daß mithin von

Staudts Benutzung des Raumes zur Begründung der Geometrie der Lage in der Ebene kein künstliches, sondern ein notwendiges Hilfsmittel ist.

Ein dem Hilbertschen nachgebildetes, freilich weniger elementares Beispiel dieser Art erhält man dadurch, daß man auf (einer Fläche *variablen* Krümmungsmaßes, z. B. auf) einem dreiachsigen Ellipsoid, etwa durch eine Ellipse ein Gebiet so abgrenzt, daß irgend zwei (verschiedene) Punkte dieses Gebietes durch eine (und nur eine) kürzeste (geodätische) Linie verbunden sind, und alsdann das so abgegrenzte Gebiet auf die Ebene der Ellipse (etwa orthogonal) projiziert. Die Geraden der Ebene, soweit sie außerhalb der genannten Ellipse verlaufen, ergänzt, wo dies in Frage kommt, durch die ihre Schnittpunkte mit jener Ellipse verbindenden Bögen der projizierten kürzesten Linien, bilden ein Linien-System, das demselben Zweck dient (Nicht-Desarguessche Geometrie) wie das Hilbertsche.

Während aber bei dem Hilbertschen Linien-System kein endliches Gebiet abgegrenzt werden kann, in dem sich nicht ein Teilgebiet angeben ließe, innerhalb dessen die Sätze der projektiven Geometrie Geltung haben (da das von Hilbert benutzte System von ∞^2 Kreisen durch einen festen Punkt durch Transformation mittels reziproker Radien mit jenem festen Punkt als Zentrum in ein System von ∞^2 Geraden der Ebene übergeführt werden kann), so ist dies für das zweite Liniensystem nicht der Fall. Vielmehr kann, wie aus klassischen Untersuchungen Beltramis[1]) hervorgeht, im 2. Falle, in dem wir zum Unterschiede von Systemen der Hilbertschen Art (die *Hilbertsche Liniensysteme* heißen mögen) von einem *Beltramischen Liniensystem* sprechen wollen, im Innern der Ellipse kein Gebiet abgegrenzt werden, in dem die projektive Geometrie gilt.

Im folgenden habe ich mir nun die doppelte *Aufgabe* gestellt: *erstens* ein dem Hilbertschen Liniensystem analoges anzugeben, bei dem die in Frage stehenden Eigenschaften (Nicht-Desarguessche Geometrie) noch leichter zu durchschauen sind; *zweitens* — und das ist die *Hauptaufgabe* — ein ebenso elementares (ebenes) Analogon des beschriebenen Beltramischen Liniensystems zu bilden. Bei beiden Aufgaben sollen nur Linien der Elementargeometrie benutzt werden und die notwendigen Konstruktionen mit Hilfe von Lineal und Zirkel ausführbar sein, so daß man aus dem Bereich *rationaler* und *quadratisch-irrationaler* Operationen nicht herausgeführt wird.

Es bereitet keine Schwierigkeiten, andere Nicht-Desarguessche Liniensysteme hinzuzufügen, bei denen außer Linien der Elementar-Mathematik auch höhere algebraische oder transzendente Kurven, z. B. Exponentiallinien verwandt werden, wie wir beiläufig zeigen wollen.

[1]) Annali di matematica, 7 (1865), S. 187.

II.

Ordnet man in einer Euklidischen Ebene jedem (reellen) Punkt P mit den rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten x, y den Punkt P^* mit den Koordinaten $x^* = x$, $y^* = e^y$ zu, so wird die Ebene auf die obere Halbebene ($y > 0$) abgebildet.

Ordnet man jedem (reellen) Punkte der oberen Halbebene mit den Koordinaten x, y ($y > 0$) den Punkt P^* mit den Koordinaten $x^* = x$, $y^* = |\sqrt{y}|$ zu, so wird die obere Halbebene ($y > 0$) auf sich selbst abgebildet.

Beide Abbildungen sind (bei Beschränkung auf eigentliche Punkte der Ebene) ausnahmslos umkehrbar eindeutig und überall stetig.

Den geraden Linien $y = ax + b$ entsprechen bei der ersten Abbildung die Exponentiallinien $y = e^{ax+b}$, bei der zweiten die Äste der Parabeln

$$y^2 = ax + b$$

in der oberen Halbebene. In beiden Fällen liegen die Schnittpunkte entsprechender Kurvenpaare auf Parallelen zur Y-Achse. Und sowohl die Parabeläste, als auch die Exponentiallinien haben in keinem (eigentlichen) Punkte eine horizontale oder vertikale Tangente, während im übrigen alle dazwischen liegenden durchweg spitzen *oder* durchweg stumpfen Steigungswinkel genau einmal angenommen werden. Beide Liniensysteme gehen überdies durch jede Translation in Richtung der X-Achse und durch Spiegelung an jeder Parallelen zur Y-Achse in sich über.

Dies vorausgeschickt läßt sich unsre Aufgabe mühelos und in durchsichtigster Weise lösen, wobei wir wohl nicht ausdrücklich darauf hinzuweisen brauchen, daß sich die Schnittpunkte koaxialer Parabeln mittels Zirkels und Lineals konstruieren lassen.

III.

a) Hilbertsche Systeme.

Wir schneiden in die obere Halbebene ($y > 0$) ein rechteckiges Fenster $ABEF$ beliebiger Größe, dessen Kanten zu den Koordinaten-Achsen parallel sind. Unser Liniensystem soll bestehen aus:

1. sämtlichen horizontalen und vertikalen Geraden (Parallelen zur X- und Y-Achse);

2. allen Geraden $y = ax + b$ ($a \neq 0$), die nicht in das Innere des Fensters eindringen;

3. allen Geraden $y = ax + b$ ($a \neq 0$), die das Rechteck in zwei getrennten

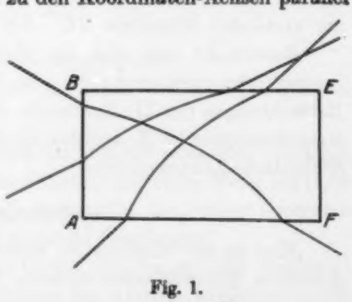


Fig. 1.

Punkten schneiden, soweit sie außerhalb des Rechteckes verlaufen, ergänzt — im Innern des rechteckigen Fensters — durch die ihre Schnittpunkte mit dem Rechteck verbindenden Bögen der Parabeln

$$y^2 = \alpha x + \beta$$

[oder der Exponentiallinien

$$y = e^{\alpha x + \beta}] .$$

Schließt man das Kontinuum der Punkte x, y durch Hinzufügen von ∞^1 uneigentlichen Punkten („der unendlich-fernen Geraden") zu einem projektiven Kontinuum (Träger eines ternären Gebietes) ab, so folgt aus den Betrachtungen des II. Abschnitts unmittelbar, daß:

1. irgend zwei (verschiedene) Linien des Systems *einen* Schnittpunkt haben;
2. irgend zwei (verschiedene) Punkte der (projektiven) Ebene durch *eine* Linie des Systems verbunden sind.

Gleichwohl gilt für dieses Liniensystem die projektive Geometrie (und damit auch der Satz des Desargues) nicht, wie man unmittelbar erkennt, wenn man etwa zu den Eckpunkten A und B des Fenster-Rechtecks, sowie dem unendlich-fernen Punkte C^∞ ihrer (vertikalen) Verbindungsgeraden „den" 4. harmonischen Punkt D mittels 4-Seits-Konstruktionen aufsucht, und dabei einmal nur Linien des Systems benutzt, die nicht in das Innere des Fensters eindringen, das zweite Mal etwa das Fenster-Rechteck $ABEF$ (mit seinen „Diagonalen" AE und BF) selbst. Im ersten Falle erhält man als 4. harmonischen Punkt D *immer* den Mittelpunkt der Strecke AB; im zweiten Falle jedoch ersichtlich *nicht*: Denn die „Diagonalen" AE und BF sind hier *krumme* Linien (Bögen von Parabeln [oder Exponentiallinien]), die zur vertikalen Mittellinie GC^∞ des Rechtecks symmetrisch liegen.

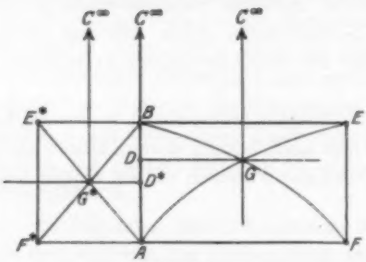


Fig. 2.

Beschränkt man sich auf Figuren und Konstruktionen, die ganz im Innern (oder ganz im Äußern) des Fensters verlaufen, so gelten (wie aus den Betrachtungen des II. Abschnitts ohne weiteres folgt) die Sätze der projektiven Geometrie (z. B. der Satz des Desargues). Es handelt sich somit hier um *Hilbertsche Liniensysteme.*

b) Beltramische Systeme.

Eine leichte Modifikation unsrer Linien-Systeme führt uns auch auf die gesuchten *Beltramischen Systeme*. Dabei können wir zunächst das rechteckige

Fenster (in der oberen Halbebene) durch einen *horizontalen Streifen* ersetzen, der durch die Geraden

$$y = k \quad \text{und} \quad y = K \qquad (0 < k < K < \infty)$$

begrenzt ist:

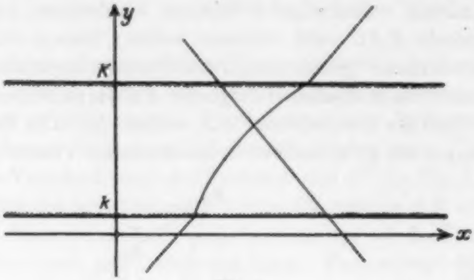


Fig. 3.

Linien des Systems sind:

1. alle horizontalen und vertikalen geraden Linien;
2. alle geraden Linien
$$y = ax + b \qquad (a < 0);$$
3. alle geraden Linien
$$y = ax + b \qquad (a > 0),$$

soweit sie außerhalb des Streifens verlaufen, ergänzt durch die ihre Schnittpunkte mit den Grenzgeraden des Streifens — in seinem Innern — verbindenden Bögen der Parabeln

$$y^2 = \alpha x + \beta$$

[oder der Exponentiallinien

$$y = e^{\alpha x + \beta}].$$

Schließt man wieder das Kontinuum der Punkte x, y zu einem projektiven Kontinuum ab (und definiert das „Innere" des „Streifens" passend), so sind auch hier die beiden Fundamentalbedingungen der projektiven Geometrie erfüllt:

1. zwei Linien des Systems haben *einen* Schnittpunkt;
2. zwei Punkte der (projektiven) Ebene sind durch *eine* Linie des Systems verbunden.

Daß gleichwohl in diesem Liniensystem der Satz des Desargues nicht gilt, daß man jetzt insbesondere im Innern des Streifens auf keine Weise ein (endliches) Gebiet abgrenzen kann, innerhalb dessen die projektive Geometrie Gültigkeit hat, erkennt man leicht durch folgende Überlegung.

Angenommen es gäbe ein derartiges Gebiet (im Innern des Streifens), so ließe sich in ihm sicher auch ein von Linien des Systems gebildetes gerad-

liniges stumpfwinkliges Dreieck SAC angeben, dessen stumpfer Winkel bei A liegt und dessen Seite AC horizontal ist.

Wir fragen nach „dem" Punkt D, der zusammen mit C den Punkt A und den Halbierungspunkt B der Strecke AC harmonisch trennt.

Um ihn mittels vollständiger 4-Seite zu konstruieren (wobei wir das Gebiet des Dreiecks SAC nicht verlassen wollen), können wir einmal ausschließlich „gewöhnliche" gerade Linien des Systems verwenden, indem wir z. B. die durch den Punkt A gehende Diagonale AE des zu benutzenden 4-Ecks $ABEF$ (Fig. 4) auf der Vertikalen durch A wählen. Bei allen Konstruktionen dieser Art gelangen wir zu *demselben* 4. harmonischen Punkte D.

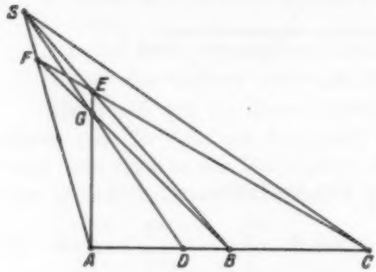


Fig. 4.

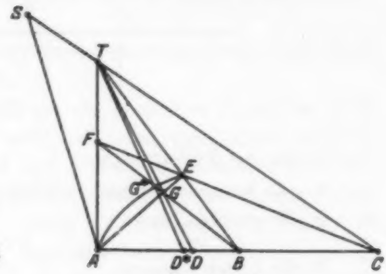


Fig. 5.

Andrerseits können wir die Konstruktionslinien so wählen, daß eine oder mehrere *krumme* Linien des Systems benutzt werden, z. B. indem wir den Punkt F des Vierecks $ABEF$ auf der Vertikalen durch A wählen. Da bei dieser Konstruktion eine und nur eine krumme Linie des Systems benutzt wird — die geradlinige Diagonale AE, die wieder auf den früheren Punkt D führen würde, ist durch einen Parabelbogen [oder ein Stück einer Exponentiallinie] zu ersetzen —, so ist ganz unmittelbar und ohne irgendwelche Rechnung ersichtlich, daß wir zu einem *anderen* 4. harmonischen Punkt D^* geführt werden. Die beschriebenen Liniensysteme sind daher *Beltramische Systeme.*

IV.

Wir schließen mit der Bemerkung, daß man zur Bildung Hilbertscher und Beltramischer Liniensysteme unsrer Art natürlich auch beliebig viele andere nach dem im II. Abschnitt unsrer Betrachtung gewiesenen Gesichtspunkte passend gewählte Linien-Systeme benutzen kann[2]), daß man insbe-

[2]) Man braucht nur außer den horizontalen und vertikalen Geraden die Linien der ∞^2-Schar $y=f(z)$ zu wählen, wo $z=ax+b$ gesetzt ist und $y=f(z)$ eine in einem passend gewählten Rechteck (umkehrbar) eindeutige und stetige Funktion von z ist, derart daß auch die Umkehrung $z=\varphi(y)$ in jenem Rechteck (und auf seinem

sondere auch die verwandten Parabeln und Exponentiallinien miteinander kombinieren kann, indem man etwa zugleich Parabeln

$$y^2 = \alpha x + \beta \qquad (\alpha > 0)$$

und Exponentiallinien

$$y = e^{\alpha x + \beta} \qquad (\alpha < 0)$$

heranzieht.

Bei dem zuletzt gekennzeichneten System bilden die ∞^1 horizonzalen und ∞^1 vertikalen geraden Linien die Übergangsscharen zwischen den beiden kontinuierlichen ∞^2-Scharen von Parabelbögen und Exponentiallinien des Systems. Wählt man die Konstruktionsanordnung wie in den Figuren 4 und 5, so tritt hier die Verschiedenheit der Punkte D und D^* (in Fig. 5) noch krasser zutage, da jetzt die entscheidenden beiden Diagonalen AE sich nicht mehr wie Bogen und Sehne zu einander verhalten, sondern wie die Umrißlinien eines axialen Schnitts durch eine ***bikonvexe*** Linse. Man erkennt daher auch hier ohne irgendwelche Rechnung, daß es sich um ein Beltramisches (Nicht-Desarguessches) Liniensystem handelt.

Hannover, den 11. August 1921.

Rande) eindeutig und stetig ist. Denn alsdann bestimmen zwei verschiedene Punkte P_1 und P_2 auf oder im Innern des Rechtecks wegen

$$a : b : 1 = \left\| \begin{matrix} x_1 & 1 & -\varphi(y_1) \\ x_2 & 1 & -\varphi(y_2) \end{matrix} \right\|$$

immer eine und nur eine Linie des Systems.

(Eingegangen am 12. 8. 1921.)

Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme.

Von

M. Dehn in Frankfurt a. M.

1.

Eine Frage aus den Grundlagen der Geometrie ist der Ausgangspunkt: Über die Begründung des Dualitäts-Prinzips ist zwischen Poncelet und Gergonne gestritten worden[1]). Poncelet konstruiert durch ein Polarsystem (etwa am Kreis) zu jeder Figur eine duale, Gergonne leitet das Prinzip aus dem dualen Charakter der projektiven Axiome unmittelbar ab. Der Streit ist nicht leicht zu entscheiden: Zunächst muß man zu den sogenannten projektiven Axiomen (der Verknüpfung und Anordnung) zur Begründung der projektiven Geometrie noch das Archimedische Postulat hinzufügen, das aber in geeigneter Formulierung ebenfalls dualen Charakter hat. Der entscheidende Einwand gegen die Gergonnesche Auffassung ist der folgende: Poncelet zeigt direkt durch das Polarsystem, daß zu *jeder* Figur eine duale existiert; Gergonne dagegen kann nur nachweisen, daß jede *auf Grund seiner Axiome als existierend nachgewiesene* Figur dualisierbar ist. Nun kann es aber in einer Archimedischen Geometrie Figuren geben, die in einer anderen nicht existieren: z. B. in der allgemeinsten Archimedischen Geometrie gibt es hyperbolische Involutionen ohne Doppelpunkte, in der gewöhnlichen Geometrie nicht. Um mit der Gergonneschen Schlußweise das Ponceletsche Ziel zu erreichen, müßte man demnach statt des Archimedischen sogar ein die „Vollständigkeit" involvierendes, etwa das Dedekindsche Postulat zu den projektiven Axiomen hinzufügen. — So hat Poncelets Beweis zweifellos den Vorzug der Einfachheit, wenn auch Gergonne vielleicht den „wahren" Grund des Dualitätsphänomens aufgedeckt hat.

[1]) Vgl. Poncelet, Traité, 2. Auflage, Anhang. Unsere Darstellung des Streites ist stark stilisiert. Sie soll nur unser Problem klarmachen.

Im folgenden wird die Frage untersucht, inwieweit die Gergonnesche Schlußweise in der Nicht-Archimedischen Geometrie anzuwenden ist. Dies läuft hinaus auf die Frage nach projektiven Figuren und Schnittpunktsätzen, die in einzelnen Nicht-Archimedischen Geometrien gültig sind, ohne für alle gültig zu sein. Denn wenn ein Schnittpunktsatz in allen Nicht-Archimedischen Geometrien gültig ist, oder eine projektive Figur in ihnen allen existiert, dann folgt eben die Gültigkeit resp. Existenz aus den Axiomen der Verknüpfung und Anordnung, die dualen Charakter haben. Also muß zu jedem solchen Satz der duale gültig sein, zu jeder solchen Figur auch die duale existieren.

Wir wollen das Problem arithmetisch formulieren: Unter Zugrundelegung der Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome kann man nach Hilbert[2]) durch ein „Desargues"sches Zahlensystem die geometrischen Beziehungen beschreiben. In einem solchen Zahlensystem gelten die gewöhnlichen Rechenregeln, nur die Vertauschbarkeit der Faktorenreihenfolge wird nicht vorausgesetzt, dagegen sind auch die Anordnungspostulate erfüllt. Eine aus Geraden und Punkten bestehende *Figur* wird beschrieben durch ein gleichzeitig bestehendes System von Gleichungen zwischen den Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ von der Form

$$a_{n_i} a_{n_i'} + a_{m_i} a_{m_i'} + a_{l_i} = 0.$$

Eine solche Figur ist sicher dann dualisierbar, wenn es ein System von Zahlen $b_1, b_2, \ldots$ gibt, das die Gleichungen befriedigt, die aus den obigen durch Vertauschung der Reihenfolge der Faktoren entstehen, also:

$$b_{n_i'} b_{n_i} + b_{m_i'} b_{m_i} + b_{l_i} = 0.$$

Z. B. ist eine spezielle Figur der Hilbertschen Nicht-Pascalschen Geometrie durch die Beziehung gegeben:

$$ST - 2TS = 0.$$

Eine duale Figur wird durch eine Beziehung von genau derselben Form gegeben. Da alle nichtidentischen Beziehungen in der Hilbertschen Geometrie sich auf Grund dieser Relation ergeben, ist in dieser Geometrie (nach Adjunktion der unendlich fernen Geraden) sicher das Dualitätsprinzip in seinem vollen Umfang erfüllt. Es ist wohl nicht schwer, Nicht-Pascalsche Geometrien aufzustellen, bei denen der definierenden Relation nicht dualisierbare Figuren entsprechen. (Z. B. $ST - T^3 S = 0$ mit der dual entsprechenden $uv - vu^3 = 0$.)

---

[2]) Grundlagen, Kap. V, vgl. auch die tief eindringende Darstellung von Schwan Math. Zeitschr. **3** (1919), S. 11.

Ein *Schnittpunktsatz* ist folgendermaßen arithmetisch zu formulieren: aus den Gleichungen

$$\text{A:}\quad \{x_{n_i} x_{n_i'} + x_{m_i} x_{m_i'} + l_i = 0\}$$

zwischen den Zahlen $x_1\, x_2 \ldots$ folgen die Gleichungen

$$\text{B:}\quad \{x_{\overline{n}_i} x_{\overline{n}_i'} + x_{\overline{m}_i} x_{\overline{m}_i'} + x_{\overline{l}_i} = 0\}$$

zwischen den Zahlen $x_1, x_2, \ldots,$ d. i. jedes System von Zahlen, das die Gleichungen A befriedigt, befriedigt auch die Gleichungen B.

In einer Nicht-Archimedischen Geometrie kann es projektive *Figuren* geben, die es in der gewöhnlichen Geometrie nicht gibt (s. oben). Dagegen sind alle überhaupt möglichen *Schnittpunktsätze* in der gewöhnlichen Geometrie erfüllt. So zerfallen die Schnittpunktsätze in folgende Gruppen:

1. solche, die in jeder Desarguesschen Geometrie (für jedes Desarguessche Zahlensystem) erfüllt sind; z. B.

$$\text{aus } x + y = z \quad \text{folgt} \quad z^2 - x^2 - y^2 - xy - yx = 0;$$

2. solche, die speziellen Nicht-Archimedischen Geometrien eigentümlich sind; diese Sätze sind möglicherweise in der betreffenden Geometrie nicht dualisierbar.

3. solche, aus denen der Pascalsche Satz, also jeder überhaupt mögliche Schnittpunktsatz (arithmetisch: die Kommutativität der Multiplikationen) folgt.

Wir werden im folgenden eine Reihe allgemeiner Beispiele für die dritte Gruppe aufstellen, und zwar zerfallen diese noch in zwei Teile:

a) Relationen, aus denen ohne Benutzung der Anordnungspostulate, jedoch unter Benutzung des Satzes, daß aus $a \neq 0$ $a^n \neq 0$ folgt, die Kommutativität der Multiplikation sich ergibt. Dies sind also Resultate für allgemeine Zahlsysteme (ohne Basis).

b) Relationen, aus denen erst mit Benutzung der Anordnungspostulate die Kommutativität der Multiplikation sich ergibt.

Ganz besonderes Interesse haben die unter 2 und 3b) fallenden Relationen: bestimmte Typen von Zahlsystemen werden charakterisiert durch Relationen, die zwischen einer Anzahl von ihren Elementen allgemein erfüllt sind, Relationen, die man etwa als spezielle Rechnungsregeln bezeichnen kann.

Für die Schnittpunktsätze der Gruppen 1 und 3 gilt in jeder Geometrie, in der sie gültig sind, auch die duale Übertragung.

2.

Wir beschäftigen uns zunächst mit Beziehungen von der Form

$$G(x_1 \ldots x_n) = 0,$$

wo G eine ganze rationale Funktion der Argumente mit ganzzahligen Koeffizienten ist.

Wir können diese Allgemeinheit leicht beschränken: G ist die Summe von Gliedern der Form $\alpha x_i x_p x_r \ldots$, wobei wir voraussetzen dürfen, daß die Glieder gleicher Zusammensetzung nur einmal vorkommen und daß, da ja G nicht identisch in unserem Zahlensystem verschwinden soll, die Koeffizienten α von Null verschieden sind. ***$G = 0$ ist äquivalent mit einer Anzahl von in den Parametern x_i homogenen Relationen:*** Wir schreiben G in der Form:

$$G \equiv G_0 + G_1 + \ldots + G_k + \ldots,$$

wo G_k alle Glieder k-ten Grades in x_1 enthält. Dann ersetzen wir x_1 nacheinander durch $2x$, $3x$ ... und erhalten so die Gleichungen:

$$\sum_{k=0\ldots} n^k G_k = 0,$$

aus denen durch Kombination.

$$G_k = 0$$

folgt. Dann zerlegen wir jede der G_k in bezug auf x_2 in homogene Bestandteile usw., womit unsere Behauptung erwiesen ist. Wir beschränken uns im folgenden auf homogene Relationen in 2 Parametern a und b.

3.

Beispiel. Aus irgendeiner in a quadratischen, in b linearen Relation folgt $ab = ba$.

Beweis. Die Relation hat die Form:

$$\Gamma(a, b) \equiv \alpha a^2 b + \beta aba + \gamma ba^2 = 0. \tag{1}$$

Wir ersetzen b durch $b + 1$ und erhalten die Beziehung:

$$\alpha a^2(b+1) + \beta a(b+1)a + \gamma(b+1)a^2 = 0,$$

durch Kombination mit (1)

$$\alpha a^2 + \beta a^2 + \gamma a^2 = 0$$

für jedes a, also

$$\alpha + \beta + \gamma = 0. \tag{1'}$$

Wir bezeichnen $ab - ba$ mit δ_1, dann ist

$$0 = \Gamma \equiv (\alpha + \beta + \gamma) ba^2 + \alpha(a\delta_1 + \delta_1 a) + \beta\delta_1 a$$

also wegen (1'):

$$(2)\qquad \alpha a \delta_1 + (\alpha + \beta)\delta_1 a = 0.$$

Wir ersetzen a durch $a + 1$, dadurch ändert sich δ_1 nicht, und erhalten:

$$\alpha(a+1)\delta_1 + (\alpha+\beta)\delta_1(a+1) = 0$$

durch Kombination mit (2)

$$(2\alpha + \beta)\delta_1 = 0,$$

also, wenn δ_1 nicht null sein soll, womit unsere Behauptung erwiesen wäre, muß

$$2\alpha + \beta = 0$$

sein, dadurch wird aus (2)

$$(2')\qquad a\delta_1 - \delta_1 a = 0.$$

Wir ersetzen b durch b^2, dadurch geht δ_1 in $b\delta_1 + \delta_1 b$ über, und wir erhalten aus (2'):

$$(a\delta_1 - \delta_1 a)b + 2\delta_1^2 + b(a\delta_1 - \delta_1 a) = 0$$

also wegen (2'):

$$(3)\qquad 2\delta_1^2 = 0.$$

Aus (3) folgt auf Grund unserer Voraussetzung über die in unserem Zahlensystem geltenden Rechnungsregeln.

$$\delta_1 = 0,$$

wie behauptet war.

4.

Wir setzen $a\delta_i - \delta_i a = \delta_{i+1}$, $\delta_0 = b$. δ_n ist vom n-ten Grad in a und vom ersten in b. Zwischen den δ_i bestehen keine identischen Beziehungen. Wir geben im folgenden eine Zusammenstellung der zu gebrauchenden Substitutionen von a und b und schreiben daneben die entsprechenden Substitutionen der δ_n. Die Formeln sind durch Rechnung leicht zu bestätigen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a+k & b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \delta_n \\ \delta_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ a^2 & b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \delta_n \\ a^n\delta_n + \binom{n}{1} a^{n-1}\delta_n a + \binom{n}{2} a^{n-2}\delta_n a^2 + \dots \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & b \\ a & b+k \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \delta_n \\ \delta_n \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & b^2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \delta_n \\ b\delta_n + \binom{n}{1}\delta_1\delta_{n-1} + \binom{n}{2}\delta_2\delta_{n-2} + \dots + \delta_n b \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ a & ab \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \delta_n \\ a\delta_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ a & ba \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \delta_n \\ \delta_n a \end{pmatrix}.$$

Die Substitution $\begin{pmatrix} a & b \\ a+k & b \end{pmatrix}$ gibt die Möglichkeit, aus einer Relation $\Gamma = 0$ in a homogene Relationen vom nullten, ersten, zweiten, … Grade abzuleiten. Diese Relationen entstehen durch Differentiation nach a. Das analoge gilt für die Substitution $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b+k \end{pmatrix}$.

a) ***Eine in b lineare Relation $\Gamma = 0$ ist äquivalent mit einer Relation von der Form $\delta_r = 0$.***

Beweis. Γ hat die Form:

$$\Gamma \equiv \sum_{m=0}^{m=s} \alpha_m a^m b a^{s-m} = 0;$$

daraus folgt, wenn $a = b = 1$ gesetzt wird:

$$\sum_{m=0}^{m=s} \alpha_m = 0.$$

Folglich:

$$\Gamma \equiv \sum_{m=1}^{m=s} \alpha_m (a^{m-1}\delta_1 + a^{m-2}\delta_1 a + \ldots) a^{s-m} + b\left(\sum_{m=0}^{m=s} \alpha_m\right) a^s$$

$$\equiv \sum \alpha_m (a^{m-1}\delta_1 + a^{m-2}\delta_1 a + \ldots) a^{s-m} = 0.$$

Durch $s-1$-malige Differentiation nach a folgt hieraus:

$$\left(\sum_{m=1}^{m=s} \alpha_m \cdot m\right) \delta_1 = 0.$$

Also entweder $\delta_1 = 0$, woraus rückwärts $\Gamma = 0$ folgt, oder $\sum_{m=1}^{m=s} \alpha_m m = 0$. Wir haben jedenfalls:

$$\Gamma \equiv \sum_{m=2}^{m=s} \alpha_m (a^{m-2}\delta_2 + 2a^{m-3}\delta_2 a + \ldots (m-1)\delta_2 a^{m-2}) a^{s-m} = 0,$$

woraus durch Differentiation:

$$\left(\sum_{m=2}^{m=s} \binom{m}{2} \alpha_m\right) \delta_2 = 0.$$

So fahren wir fort, bis wir schließlich zur Relation:

$$\alpha_s \delta_s = 0$$

kommen. Alle Gleichungen:

$$\sum_{m=k}^{m=s} \binom{m}{k} \alpha_m = 0$$

können nicht gleichzeitig erfüllt sein, weil daraus das Verschwinden sämtlicher α_i folgen würde. Sei r die erste Zahl, für die

$$\sum_{m=r}^{m=s} \binom{m}{r} \alpha_m \neq 0$$

ist, dann folgt aus $\Gamma = 0$ $\delta_r = 0$ und umgekehrt, wie behauptet.

b) *Eine Relation $\Gamma = 0$ ist äquivalent mit einer Anzahl von Relationen von der Form*:

$$\sum \varrho_m \delta_{i_m} \delta_{k_m} \ldots$$

(die Anzahl der δ in jedem Glied ist gleich dem Grad von Γ in b, die Summe $i_m + k_m + \ldots$ ist gleich dem Grad von Γ in a).

Es genügt, den Fall, daß Γ quadratisch in b ist, durchzuführen:

$$\Gamma \equiv \sum_{0 \leqq m+l \leqq s} \alpha_{m,l} a^m b a^l b a^{s-m-l},$$

daraus durch $a = b = 1$:

$$\sum \alpha_{m,l} = 0.$$

Also

$$\Gamma \equiv \sum_{1 \leqq m+l \leqq s} \alpha_{m,l} [(a^{m-1} \delta_1 + a^{m-2} \delta_1 a + \ldots) a^l \delta_0 a^{s-m-l} \\ + \delta_0 (a^{m+l-1} \delta_1 + a^{m+l-2} \delta_1 a + \ldots) a^{s-m-l}] = 0.$$

Durch Differentiation:

$$\Gamma_1 \equiv \delta_1 \delta_0 \sum_{1 \leqq m+l \leqq s} m \alpha_{m,l} + \delta_0 \delta_1 \sum_{1 \leqq m+l < s} (m+l) \alpha_{m,l} = 0.$$

Durch Fortsetzung allgemein:

$$\Gamma_r \equiv \delta_r \delta_0 \sum_{r \leqq m+l \leqq s} \binom{m}{r} \alpha_{m,l} + \delta_{r-1} \delta_1 \sum_{r \leqq m+l \leqq s} \binom{m}{r-1} \binom{m+l-(r-1)}{1} \alpha_{m,l} + \ldots = 0$$

bis zur letzten Relation

$$\Gamma_s \equiv \alpha_{s,0} \left(\delta_s \delta_0 + \binom{s}{1} \delta_{s-1} \delta_1 + \ldots\right) + \alpha_{s-1,1} \left(\delta_{s-1} \delta_1 + \binom{s-1}{1} \delta_{s-2} \delta_2 + \ldots\right) \\ + \ldots + \alpha_{1,s} \delta_0 \delta_s = 0.$$

Die Relationen $\Gamma_1 = 0$, $\Gamma_2 = 0$, $\ldots$, $\Gamma_r = 0$ folgen aus $\Gamma = 0$ und umgekehrt folgt $\Gamma = 0$ aus dem gleichzeitigen Bestehen der obigen s Relationen, entsprechend unserer Behauptung. Ist Γ von höherem als zweiten Grad in b, so kann man genau dasselbe Verfahren anwenden.

5.

Ist Γ linear in b, so folgt aus $\Gamma = 0$ $\delta_1 = 0$.

Nach 4. a) folgt aus $\Gamma = 0$ $\delta_r = 0$. Aus $\delta_r = 0$ folgt weiter $\delta_{r+n} = 0$, wenn n irgendeine positive Zahl ist, wie unmittelbar aus der Definition von δ_i sich ergibt. Ist also $r \geqq 2$, dann folgt aus $\delta_r = 0$ auch $\delta_{2r-2} = 0$.

Nach (4) geht bei der Substitution $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b^2 \end{pmatrix}$ δ_{2r-2} in δ'_{2r-2} über, wo

$$\delta'_{2r-2} = b \delta_{2r-2} + \binom{2r-2}{1} \delta_1 \delta_{2r-3} + \ldots \binom{2r-2}{r-2} \delta^2_{r-1} + \ldots + \delta_{2r-2} b.$$

Es ist auch δ'_{2r-2} gleich null; also da $\delta_{2r-2} = \delta_{2r-3} \ldots = \delta_r = 0$ sind, nach der obigen Formel auch

$$\delta_{r-1} = 0.$$

Es folgt also aus der Beziehung $\delta_r = 0$ die Beziehung $\delta_{r-1} = 0$. Durch Fortsetzung erhalten wir die gewünschte Folge

$$\delta_1 = 0.$$

Wenden wir dies Resultat auf in a lineare Relationen an, so folgt in Verbindung mit **4.** b: *Wenn die Koeffizienten von Γ nicht besonderen Bedingungen genügen* (es müssen sämtliche Koeffizienten von Γ_1 verschwinden), *so folgt aus* $\Gamma = 0 \quad \delta_1 = 0$.

6.

a) *Aus jeder in a und b quadratischen Relation folgt* $\delta_1 = 0$.

Nach **4.** b folgt aus einer solchen Relation eine Relation von der Form:

$$\alpha\,\delta_0\,\delta_2 + \beta\,\delta_1^2 + \gamma\,\delta_2\,\delta_0. \tag{1}$$

Wir nehmen zunächst an, daß nicht α, β und γ gleich Null sind.

Durch Differentiation nach $\delta_0 (= b)$:

$$(\alpha + \gamma)\,\delta_2 = 0,$$

also entweder $\delta_2 = 0$, woraus nach **5.** $\delta_1 = 0$ folgt, oder $\alpha + \gamma = 0$. Wir untersuchen

$$\alpha\,\delta_0\,\delta_2 + \beta\,\delta_1^2 - \alpha\,\delta_2\,\delta_0; \tag{1'}$$

durch die Substitution $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\,b \end{pmatrix}$:

$$\alpha\,\delta_0\,a\,\delta_2 + \beta\,\delta_1\,a\,\delta_1 - \alpha\,\delta_2\,a\,\delta_0;$$

durch identische Umformung unter Benutzung von (1):

$$\alpha\,\delta_1\,\delta_2 + \beta\,\delta_2\,\delta_1 - \alpha\,\delta_3\,\delta_0;$$

durch Differentiation nach δ_0:

$$-\alpha\,\delta_3 = 0,$$

also entweder $\delta_3 = 0$, woraus nach **5.** $\delta_1 = 0$, oder $\alpha = 0$, woraus nach (1′) $\delta_1^2 = 0$, also auch $\delta_1 = 0$ folgt.

Ist aber $\alpha = \beta = \gamma = 0$, dann ist $\Gamma = 0$ nach **4.** b äquivalent mit einer in b linearen Relation, aus der nach **5.** wieder $\delta_1 = 0$ folgt.

b) *Aus jeder in b quadratischen Relation folgen von den Koeffizienten unabhängige Relationen.*

Nach 4. b) folgt aus einer solchen Relation eine von der Form:

$$(3) \qquad \sum_m \alpha_m \delta_m \delta_{s-m} = 0,$$

wo s der Grad der Relation in a ist und nicht alle $\alpha_i = 0$ sind. Sei $t+1$ nicht kleiner als die Anzahl der von null verschiedenen Koeffizienten α_m, dann folgt aus (3):

$$(4) \qquad \delta_{m+t}\delta_{s-m} + \binom{t}{1}\delta_{m+t-1}\delta_{s-m+1} + \binom{t}{2}\delta_{m+t-2}\delta_{s-m+2} + \cdots = 0.$$

Beweis. Durch die Substitution $\begin{pmatrix} a & b \\ a^2 & b \end{pmatrix}$ folgt aus (3):

$$\sum \alpha_m \left(a^m \delta_m + \binom{m}{1} a^{m-1}\delta_m a + \ldots\right)\left(a^{s-m}\delta_{s-m} + \binom{s-m}{1} a^{s-m-1}\delta_{s-m} a + \ldots\right) = 0;$$

$(s-1)$mal nach a differenziert (nach Division durch 2^{s-1}):

$$\sum \alpha_m [m(a\delta_m + \delta_m a)\delta_{s-m} + (s-m)\delta_m(a\delta_{s-m} + \delta_{s-m} a)] = 0;$$

durch identische Umformung unter Benutzung von (3):

$$(5) \qquad \sum \alpha_m m(\delta_{m+1}\delta_{s-m} + \delta_m \delta_{s-m+1}) = 0.$$

Andererseits aus (3) durch Substitution $\begin{pmatrix} a & b \\ a & ab \end{pmatrix}$ und identische Umformung:

$$\sum \alpha_m \delta_{m+1}\delta_{s-m} = \sum \alpha_m \delta_m \delta_{s-m+1} = 0,$$

durch Kombination mit (5):

$$(3') \qquad \sum \alpha_m (m - n_1)(\delta_{m+1}\delta_{s-m} + \delta_m \delta_{s-m+1}) = 0,$$

wodurch das Glied mit dem Koeffizienten α_{n_1} aus der Relation (3) heraus geschafft ist.

Wir machen wieder die Substitution $\begin{pmatrix} a & b \\ a^2 & b \end{pmatrix}$ und erhalten durch denselben Prozeß wie oben:

$$\sum \alpha_m (m-n_1)[m(\delta_{m+2}\delta_{s-m} + 2\delta_{m+1}\delta_{s-m+1} + \delta_m \delta_{s-m+2}) \\ + \delta_{m+2}\delta_{s-m} + \delta_{m+1}\delta_{s-m+1}] = 0;$$

hieraus wird durch Kombination mit den aus (3') durch die Substitution $\begin{pmatrix} a & b \\ a & ab \end{pmatrix}$ gewonnenen Relationen:

$$\sum \alpha_m (m-n_1)\delta_{m+2}\delta_{s-m} + \delta_{m+1}\delta_{s-m+1}) \\ = \sum \alpha_m (m-n_1)(\delta_{m+1}\delta_{s-m+1} + \delta_m \delta_{s-m+2}) = 0$$

gefolgert:

$$(3'')\quad \sum \alpha_m (m-n_1)(m-n_2)(\delta_{m+2}\,\delta_{s-m} + 2\,\delta_{m+1}\,\delta_{s-m+1} + \delta_m\,\delta_{s-m+2}) = 0.$$

Durch Fortsetzung des Verfahrens erhalten wir die gewünschte Relation (4), womit unsere Behauptung erwiesen ist.

7.

a) *Aus jeder in a kubischen, in b quadratischen Relation folgt mit Benutzung der Anordnungspostulate* $\delta_1 = 0$.

Wir können die Relation in der Form:

$$\alpha\,\delta_1\,\delta_2 + \beta\,\delta_2\,\delta_1 + \gamma\,\delta_0\,\delta_3 + \varepsilon\,\delta_3\,\delta_0 = 0$$

ansetzen. Durch Differentiation nach δ_0 folgt, wenn nicht δ_3 (und also auch δ_1) null sein soll, $\gamma + \varepsilon = 0$; durch die Substitution $\begin{pmatrix} a & b \\ a & ab \end{pmatrix}$, identische Umformung und Differentiation nach δ_0 folgt (s. **6.** a)) $\gamma = \varepsilon = 0$. Aus

$$(1)\quad \alpha\,\delta_1\,\delta_2 + \beta\,\delta_2\,\delta_1 = 0$$

folgt durch Substitution $\begin{pmatrix} a & b \\ a & ab \end{pmatrix}$:

$$(2)\quad \alpha\,\delta_1\,\delta_3 + \beta\,\delta_2^2 = 0.$$

Aus (1) andererseits **6.** b):

$$(2')\quad \delta_2^2 + \delta_1\,\delta_3 = 0,$$

durch Vergleich mit (2) also, wenn nicht $\delta_2^2 = 0$, also $\delta_2 = 0$, also $\delta_1 = 0$, folgen soll:

$$\alpha = \beta.$$

Es bleibt also als einzige Relation vom dritten Grad in a und zweiten Grad in b, aus der nicht $\delta_1 = 0$ *folgt:*

$$(\mathrm{a})\quad \delta_1\,\delta_2 + \delta_2\,\delta_1 = 0.$$

Aber nach den Anordnungspostulationen haben $\delta_1\,\delta_2$ und $\delta_2\,\delta_1$ dasselbe Vorzeichen und ihre Summe kann also nicht null sein, ohne daß $\delta_1\,\delta_2$ und $\delta_2\,\delta_1$ selbst null sind; hieraus folgt dann, daß δ_2 oder δ_1 null sein muß, also jedenfalls auch δ_1, womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Es bleibt aber die Möglichkeit nicht kommutativer Zahlsysteme (ohne Anordnungsregeln), in der die Regel (a) *allgemein gültig ist.*

b) *Aus jeder Relation von der Form:*

$$(3)\quad \alpha\,\delta_m\,\delta_{s-m} + \beta\,\delta_n\,\delta_{s-n} = 0$$

folgt mit Hilfe der Anordnungspostulate $\delta_1 = 0$.

Wir setzen etwa $m \geqq s - m$ voraus. Dann kann durch genügend oftmalige Anwendung der Substitution $\begin{pmatrix} a & b \\ a & ab \end{pmatrix}$ und identischen Umformungen (3) geschlossen werden:

$$\alpha \delta_m^2 + \beta \delta_n \delta_{2m-n} = 0,$$

oder nach **6.** b):

$$\delta_{m+1} \delta_m + \delta_m \delta_{m+1} = 1,$$

woraus, wie unter a), das Verschwinden von δ_1 folgt.

8.

Eine gleichzeitig aus dem Desargues nicht folgende und den Pascal nicht zur Folge habende Relation $\Gamma(a, b) = 0$ ist in a und b mindestens vom dritten Grade, oder in einem von den beiden mindestens vom vierten, im andern mindestens vom zweiten Grade.

(Eingegangen am 3. 10. 1921.)

Il principio di degenerazione e la geometria sopra le curve algebriche.

Von

Federigo Enriques in Bologna.

1. Il principio di continuità di Poncelet ha, nella teoria delle funzioni algebriche, un' importanza che non deve essere ridotta — come spesso accade — alle sole questioni numerative. A questo criterio fondamentale sono ispirate le „Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche" di cui già ho pubblicato due volumi colla collaborazione del Dr. Oscar Chisini[1]), e di cui stiamo preparando il terzo, che si riferisce ad argomenti nuovamente svolti nei miei corsi universitari degli anni 1918—19 e 1919—20. Da questo volume traggo la presente Nota.

Già Nöther e Lindemann ebbero ad osservare che cosa diventino per (continuità le proposizioni fondamentali della geometria sopra una curv piana) f di genere p, quando questa, variando in dipendenza d' una parametro, acquisti nuovi punti multipli: si tratta qui di un' estensione alle curve non-aggiunte o virtualmente aggiunte dei teoremi relativi alle serie segate dalle ordinarie aggiunte[2]). Ma lo scopo di questa Nota è — in qualche modo — inverso. Si faccia variare la f, con moduli generali, in guisa che acquisti p punti doppi, e diventi quindi razionale. Allora la geometria sopra la curva di genere p — con moduli generali — si rispecchierà nella teoria delle serie lineari sopra la retta; vogliamo mostrare come si trovino così i teoremi fondamentali di quella geometria, per p qualunque. Questa via di dimostrazione ha, in principio, soltanto un *valore euristico*, e non vale la pena d' indugiarsi a trasformarla in un metodo rigoroso di prova. Per contro è interessante vedere come la degenerazione della curva di genere p in una retta, o in una curva di genere $< p$, offra il modo di stabilire rigorosamente alcuni punti delicati della dottrina generale, che non hanno ricevuto — mi sembra — un tratta-

[1]) Bologna, Zanichelli.

[2]) Cfr. l' Anhang F alle „Vorlesungen über algebraische Geometrie" di F. Severi (Leipzig, Teubner, 1921, pg. 247).

mento soddisfacente, ovvero lo hanno ricevuto soltanto per mezzo degli integrali abeliani.

2. Osserviamo anzitutto che, per mezzo della degenerazione anzidetta (acquisto di p nuovi punti doppi), *le g_n^r sopra una curva di genere p si riducono alle g_n^r sopra una retta dotate di p coppie neutre*, cioè presentanti una sola condizione ai gruppi di queste serie che debbano contenerla; le quali coppie — giova notarlo — possono assumersi ad arbitrio. In questo senso possiamo parlare di una *retta con p coppie* come di una *curva di genere virtuale p*.

Cio posto vediamo come i teoremi fondamentali della geometria sopra una curva si rispecchino semplicemente sopra una retta con p coppie.

1. Sopra la curva di genere p, ogni gruppo di n punti appartiene ad una determinata serie lineare completa g_n^r con $r \geqq n-p$.

Si tratta di mostrare che sopra la retta «esiste una determinata serie lineare g_n^r con $r = n-p$, contenente un dato gruppo G_n e possedente p coppie neutre $A_{i1} A_{i2}$ $(i = 1, 2, \dots p)$».

A tale scopo si osservi che la serie g_n^{n-1} completa, contenente un G_n e rispetto a cui è data una coppia neutra $A_1 A_2$, si costruisce combinando linearmente il G_n con la g_n^{n-2} che possiede — sulla retta — i punti fissi A_1 e A_2: quindi la nostra g_n^r completa con p coppie neutre, resta definita come intersezione di p g_n^{n-1}, per cui sarà in generale $r = n-p$ ed in ogni caso $r \geqq n-p$.

Corollario del teorema 1 sono le proposizioni relative alla somma e sottrazione delle serie, in particolare il teorema del resto, per cui la serie residua di un G_m rispetto ad una g_n^r è la medesima quando si sostituisce al G_m un gruppo equivalente.

2. Ogni g_n^r completa per cui $n > 2p-2$ ha la dimensione $r = n-p$.

Riportandoci alla retta, si stacchino dalla g_n^r $p-1$ coppie neutre $A_{i1} A_{i2}$, per es. quelle per cui $i = 2, 3, \dots, p$: con ciò la dimensione della serie residua sarà $r' \geqq r-(p-1)$. Ma questa serie residua, d' ordine $n-(2p-2)$, possiede la coppia neutra $A_{11} A_{12}$ e quindi è di dimensione $r' \leqq n-(2p-2)-1$: combinando le due diseguaglianze si deduce

$$r' \leqq n-p$$

e quindi, per il teorema 1,

$$r = n-p.$$

(Si noti che il caso $n = 2p-1$ non fa eccezione nel ragionamento precedente, giacchè la serie residua cui si è condotti non può essere la g_1^1, essendo A_{11} ed A_{12} due punti distinti, ma deve ridursi ad una g_1^0, cioè ad un punto fisso.)

3. Esiste una determinata serie completa g_{2p-2}^{p-1}. Questa serie *cano-*

nica si ottiene — sopra la retta — combinando linearmente i p gruppi di $p-1$ coppie neutre.

Anzitutto si vede che i p gruppi definiti dalle coppie: $2, 3, \ldots, p$; $3, 4, \ldots, p, 1$; $1, 2, \ldots, p-1$, sono linearmente indipendenti; infatti i primi $p-1$ hanno commune la coppia p-ma; $A_{p1} A_{p2}$, che non appartiene all' ultimo gruppo. Resta così dimostrato che i nostri p gruppi definiscono effettivamente una serie g_{2p-2}^{p-1} ed è evidente che questa possiede le coppie $A_{i1} A_{i2}$ come coppie neutre, giacchè ciascuna di queste coppie è fissa per una g_{2p-2}^{p-2} contenuta nella g_{2p-2}^{p-1}.

D' altra parte è chiaro che una serie lineare g_{2p-2}^{p-1} possedente le p coppie neutre $A_{i1} A_{i2}$, contiene i gruppi formati da $p-1$ di queste coppie (importanti nel loro insieme $p-1$ condizioni) e quindi coincide con la serie lineare definita da questi gruppi: ciò significa l' unicità della serie g_{2p-2}^{p-1}, sopra la retta di genere virtuale p.

4. Ogni g_n^r completa con $r > n - p$ è contenuta nella g_{2p-2}^{p-1} canonica, e precisamente ogni gruppo della g_n^r impone $n - r$ condizioni ai gruppi canonici che debbano contenerlo (*Teorema di Riemann-Roch*).

Riportandoci alla retta togliamo dalla nostra g_n^r r coppie neutre; otteniamo così un gruppo di $n - 2r$ punti che impone ai gruppi canonici $n - 2r$ condizioni; ma le r coppie neutre impongono a questi stessi gruppi r condizioni e perciò un gruppo particolare della g_n^r e quindi — per il teorema del resto — anche un gruppo qualunque di questa serie, impone $n - 2$ condizioni ai gruppi canonici che debbano contenerlo. Per ciò la g_n^r è certo contenuta nella g_{2p-2}^{p-1}, se $n - r \leqq p - 1$.

3. La proposizione „*una curva di genere $p > 2$, a moduli generali, non possiede trasformazioni birazionali in sè stessa*“, si considera di solito come evidente. Ma forse la cosa è evidente solo per $p = 3$ e per le curve piane *generali del proprio ordine*. Ad ogni modo il teorema si dimostra colla degenerazione di una curva di genere p in una retta, poichè sulla retta non esiste alcuna proiettività (non degenere o degenere) la quale lasci invariate tre o più coppie di punti, date ad arbitrio.

Lo stesso teorema si può anche stabilire per un' altra via che conduce ad un resultato più significativo.

Se una curva f possiede trasformazioni in sè, ad ogni g_n^1 di f (che non sia invariante) viene *associata* una g_n^1 (almeno), entro cui i gruppi dotati di punto doppio formano gli stessi birapporti. Ora si può chiedere se, sopra una f di genere p con moduli generali, avvenga di trovare g_n^1 associate ad una g_n^1 data, soddisfacenti alle condizioni dette innanzi.

Assumasi, per semplicità di discorso, una g_n^1 non speciale: la f contiene un' infinità di g_n^1 analoghe, dipendente da $2n - p - 2$ parametri; mentre

i birapporti indipendenti formati dai $2n+2p-2$ gruppi d'una g_n con punto doppio sono $2n+2p-5$; perciò non esiste, in generale, su f una g'_n per cui codesti birapporti prendano valori assegnati: anzi la determinazione di una tale g'_n dipende da un sistema d'equazioni (superiore al numero delle incognite) che importa $3p-3$ condizioni di compatibilità, cioè precisamente tante quanti sono i moduli, per $p>1$. Ma se queste condizioni sono una volta soddisfatte, cioè se viene data una g'_n su f, non si può escludere a priori che ve ne sieno — di conseguenza — altre, associate, per cui i detti birapporti assumano gli stessi valori: tant'è vero che, per $p=2$, le g'_n vengono appunto associate a coppie. Il conto di costanti dice solo che, già per $p=2$, non si può avere che un *numero finito* di g'_n associate (cogli stessi birapporti).

Ora, se la f di moduli generali, ad es. per $p=3$, contenesse — sempre — *più* g'_n associate, che cosa accadrebbe quando la f stessa si fa degenerare in una f di genere 2, con una coppia neutra (o più)? È chiaro che ad una g'_n data, che possegga la detta coppia neutra $A_1 A_2$, dovrebbe essere associata (almeno) un'altra g'_n *colla medesima coppia neutra*: ma ciò è assurdo perchè la coppia $A_1 A_2$ si può far variare per continuità su f, restando sempre neutra per la data g'_n!

Risulta dunque che *per $p>2$, sopra una curva di genere p, non esiste in generale una seconda serie g'_n i cui gruppi dotati di punto doppio formino eguali birapporti a quelli analoghi di una serie data.*

Così viene rimosso un dubbio critico, che si affaccia nell'enumerazione delle classi di superficie di Riemann ad n fogli, definite da dati punti di diramazione: dove si può chiedere se due funzioni algebriche $x(u)$, $y(v)$, diramate per gli stessi valori di u e v, non possano trasformarsi birazionalmente l'una nell'altra per una sostituzione su x e u, senza che si abbia necessariamente $u=v$, e x funzione razionale di u, $y(u)$.

4. Insieme alla degenerazione di una curva di genere p in una di genere $p-1$, conseguente all'acquisto di un nuovo punto doppio, conviene seguire la *degenerazione dei cicli della sua superficie di Riemann*. Da ciò si trae una dimostrazione geometrica del *teorema di Hurwitz sulle corrispondenze* $[m, n]$, cioè che „le corrispondenze appartenenti a curve di moduli generali sono sempre *a valenza*".

La dimostrazione (che non riferirò quì distesamente) si basa sopra il riconoscimento della „condizione topologica affinchè una serie ∞^1, s_n, di gruppi di n punti, appartenente ad una curva f, sia contenuta in una serie lineare g_n dello stesso ordine"; la qual condizione costituisce il *teorema d'Abel riguardato nel suo significato topologico.*

Si faccia muovere un gruppo G_n di s_n, sopra la superficie riemanniana f, in modo che esso ritorni in se stesso: una tale *circolazione* del G_n dà

luogo ad un ciclo o ad una somma di cicli descritta dai punti del gruppo. Se la s_n è contenuta in una g_n lineare, codesta somma è sempre *omologa* ad un ciclo nullo (nel senso di Poincaré): quest' asserzione, di cui è facile la prova, costituisce il „teorema d' Abel topologico".

Il teorema d'Abel topologico inverso, „ogni s_n a circolazione nulla è contenuta in una g_n lineare", si può stabilire, come quì accenno, per le curve a moduli generali; il Dr. Chisini ne offrirà poi una dimostrazione valida per curve qualsiansi.

Io osservo anzitutto che il teorema di cui si discorre si verifica tosto sulle curve di genere $p = 1$, giacchè il punto residuo dei gruppi di s_n rispetto ad una fissata g^n_{n+1} resulta necessariamente fisso, potendo altrimente descrivere un ciclo non nullo. Dopo ciò estendo induttivamente il teorema da p a $p+1$, col metodo di degenerazione. Se, sopra una f di genere $p=2$, si suppone esistere una s_n a circolazione nulla non contenuta in una g_n lineare, si deduce anzitutto (per sottrazione da una g^n_{n+2} fissa) una serie ∞^1, s_2, a circolazione nulla, diversa dalla g'_2 di f e contenente una coppia arbitraria. Ora (essendo la f a moduli generali) si faccia degenerare la curva in una f di genere 1: la detta s_2 (o una parte di essa) dovrà divenire su f una g'_2, di cui potrà segnarsi ad arbitrio una coppia, e che — d' altra parte — dovrà ammettere come coppia neutra quella costituita dai due punti sovrapposti nel nuovo punto doppio di f: di qui l' assurdo. E analogamente si procederà da $p=2$ a $p=3$ ecc.

Il teorema stabilito permette di definire topologicamente, sopra una riemanniana f, le corrispondenze dotate di valenza γ, positiva o negativa: p. es., per γ positivo, occorre che, mentre un punto P descrive un ciclo C, i punti corrispondenti $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ descrivano uno o più cicli la cui somma sia omologa a $-\gamma C$, diguisachè la somma dei cicli descritti dal gruppo

$$G_{n+\gamma} = \gamma P + P'_1 + P'_2 + \ldots + P'_n$$

risulti omologa a zero. Quindi il metodo di degenerazione (da p a $p-1$), mercè un' analisi accurata, permette di dimostrare completamente il citato teorema d'Hurwitz: „Le corrispondenze singolari (non dotate di valenza) appartengono soltanto a curve con moduli particolari." Per studiare tali corrispondenze singolari, il metodo di degenerazione non soccorre più; ma, quando sia dimostrato senza eccezione il teorema d'Abel topologico, si dedurrà ancora topologicamente il resultato — a cui Hurwitz e Severi arrivano cogli integrali abeliani — che vi è sempre un *numero finito di corrispondenze indipendenti*.

Bologna, Luglio 1921.

(Eingegangen am 2. 8. 1921.)

Eine neue kinematische Ebenenführung.

Von

Friedrich Schilling in Danzig-Langfuhr.

Bekannt ist die genaue Ebenenführung durch das Gelenksystem des Planigraphen von Darboux-Koenigs[1]). Bei diesem Apparat liegen jedoch zweimal drei Punkte in einer durch einen Stab ausgebildeten Geraden. Ich habe mir die Aufgabe gestellt, eine andere genaue Ebenenführung durch ein solches Gelenksystem zu konstruieren, bei dem nur durch zwei Endpunkte begrenzte Stäbe gelenkig verbunden sind. Die Lösung fand sich in einer geeigneten Übertragung der bekannten Peaucellierschen Geradführung auf den Raum. Das Gelenksystem des Peaucellierschen Inversors[2]) in der einfachsten Form besteht ja aus einem Rhombus $ACBD$ mit den beiden an den Gegenecken C, D angreifenden gleichen Stäben OC und OD, dessen Vereinigungspunkt O als fester Punkt gilt (Fig. 1). Es ist dann bei jeder Deformation $OA \cdot OB = OC^2 - AC^2 =$ konst.

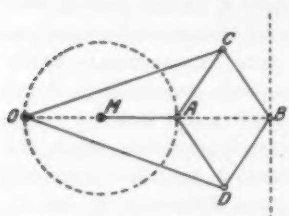


Fig. 1.

Wird der Punkt A durch einen siebenten Stab MA mit dem festen Endpunkt M auf dem Bogen eines Kreises durch O geführt, so beschreibt B ein Stück einer Geraden[3]).

Diesen Inversor kann man nun, wie bereits L. Lipkin[4]) angegeben

---

[1]) Man sehe das Nähere darüber bei A. Schoenflies, Kinematik in der Enzyklopädie der Math. Wiss. 4, S. 243 u. 256, sowie bei G. Koenigs, Leçons de Cinématique, Paris 1897, S. 295. Dieser Planigraph ist im Verlage von Martin Schilling in Leipzig als Serie 32, Nr. 6 erschienen.

[2]) Nouv. Ann. (2) 3 (1864), S. 344, u. (2) 12 (1873), S. 71.

[3]) Ein Modell dieses Apparates ist von mir ebenfalls in dem Verlage von Martin Schilling in Leipzig als Serie 24, Nr. 10 herausgegeben.

[4]) Petersburger Bull. 16 (1871), S. 57.

hat, so abändern, daß an Stelle des Rhombus ein Deltoid $ACBD$ in Drachen- oder Pfeilspitzenform gewählt wird.

Wir bilden nun hier anschließend folgendermaßen den *räumlichen Inversor*: Wir gehen aus von drei Hälften solcher Peaucellierscher Inversoren mit denselben Punkten O, A, B (Fig. 2). Es ist dann bei den Bezeichnungen der Figur $c_1^2 - c^2 = d_1^2 - d^2 = e_1^2 - e^2$. Es sei noch $c_1 > c$ vorausgesetzt. (Der Fall $c_1 < c$ ist an sich auch wohl möglich; doch führt er nicht zu einer Inversion mit reeller Inversionskugel.) Dann drehen wir zunächst zwei der Hälften, etwa die zu D und E gehörenden, um die Gerade OAB in verschiedener Weise in den Raum hinein, vielleicht die eine nach oben, die andere nach unten aus der Zeichenebene heraus, so daß die Punkte C, D, E nicht mehr in einer Geraden liegen. Dann seien

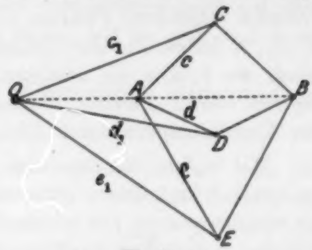


Fig. 2.

noch die gedrehten Punkte D und E durch je einen Stab u bzw. v mit C verbunden, und endlich sei noch C durch einen Stab w mit einem beliebigen Raumpunkt O_1 verbunden, der ebenso wie O als fester Punkt gilt. So erhalten wir das in Fig. 3 dargestellte räumliche Gelenksystem, in dem die Punkte A, B zur Ebene CDE, die wir weiterhin die Symmetrieebene $\mathfrak{S}$ nennen wollen symmetrisch liegen, und das aus 12 Stäben mit 7 Gelenkpunkten besteht. Es gilt jetzt der Satz:

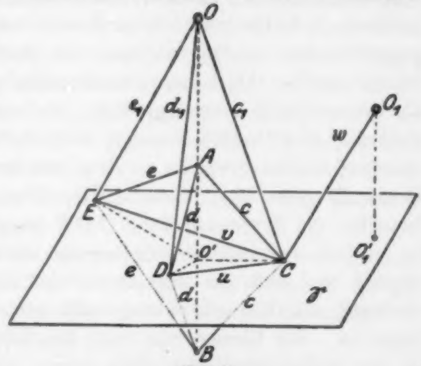


Fig. 3.

Bei jeder der möglichen Deformationen des Gelenksystems bleiben die Punkte O, A, B in einer Geraden, und es ist stets

$$OA \cdot OB = r^2 = c_1^2 - c^2,$$

d. h. das Gelenksystem stellt einen räumlichen Inversor dar.

Man überzeugt sich zunächst leicht, daß in der Tat das Gelenksystem ∞^3 verschiedene Lagen annehmen kann, d. h. drei Freiheitsgrade besitzt. Denn man kann z. B. den Punkt A im allgemeinen in eine beliebige hinreichend nahe Nachbarlage bringen. Die neuen Lagen von C, D,

E und B würden dann durch die Stabtripel c, c_1, w, bzw. d, d_1, u, bzw. e, e_1, v, bzw. c, d, e bestimmt sein, und zwar im allgemeinen eindeutig. Die Punkte A, B bleiben auch stets symmetrisch zu der (veränderlichen) Symmetrieebene CDE. Daß aber die drei Punkte O, A, B stets in einer Geraden bleiben, folgt sofort aus dem folgenden leicht zu beweisenden stereometrischen Satze:

Der geometrische Ort aller Punkte, welche von drei (nicht in einer Geraden liegenden) Punkten C, D, E einer festen Ebene solche Abstände c_1, d_1, e_1 haben, daß die Gleichungen $c_1^2 - c^2 = d_1^2 - d^2 = e_1^2 - e^2$ erfüllt sind, wo c, d, e die analogen Abstände eines außerhalb der Ebene gelegenen vierten Punktes A sind, ist das Lot von A auf die Ebene, d. h. die Verbindungslinie von A mit dem symmetrischeu Punkte B.

Wir wollen uns nun noch einen anschaulichen Überblick über alle geometrisch möglichen Deformationen dieses eigenartigen Gelenksystems zu schaffen suchen; es sei also abgesehen von den Selbstsperrungen, die bei der technischen Ausführung eines solchen Apparates bei der Deformation eintreten mögen. Zunächst wollen wir hier von dem Anschlußstabe O_1C ganz absehen und nur die Deformationen des übrigen Teiles betrachten, den wir als *Kern* bezeichnen wollen, und zwar auch nur die relativen Deformationen dieses Kernes bezüglich der Lage der Einzelstäbe gegeneinander, so daß wir auch von dem Festhalten des Punktes O im Raume absehen. Um sie zu überblicken, genügt es, unser Augenmerk auf die symmetrische vierseitige Ecke, die aus den in C zusammenstoßenden Dreiecken CAD, CAE und CBD, CBE besteht, zu richten, oder auf ihre eine Hälfte, etwa die aus den Dreiecken CAD und CAE bestehende. Denn für jede Lage dieser beiden Dreiecke gegeneinander, wobei wir fernerhin die Symmetrieebene CDE horizontal gelegen annehmen wollen, ist ja ihre symmetrische Ergänzung bz. der Ebene CDE eindeutig bestimmt und dazu die Lage von O auf AB durch c_1 ersichtlich ebenfalls eindeutig, da O, wenn einmal, auch stets oberhalb der Ebene CDE gelegen ist. Wir können nun noch annehmen, daß $\sin \sphericalangle c/u \leq \sin \sphericalangle c/v$ ist und wollen die beiden Fälle

$$\text{I.} \qquad \sin \sphericalangle c/u < \sin \sphericalangle c/v,$$

$$\text{II.} \qquad \sin \sphericalangle c/u = \sin \sphericalangle c/v$$

als den *allgemeinen* und den *speziellen Fall* unterscheiden und sie nacheinander betrachten. Wir werden sehen, daß diese beiden Fälle auch wesentlich voneinander verschieden sind.

Wir betrachten zunächst den *allgemeinen Fall*.

Hier kann dann $\sphericalangle c/u$ spitz oder stumpf und $\sphericalangle c/v$ spitz, stumpf oder 90^0 sein (daß $\sphericalangle c/u = 90^0$ ist, ist ausgeschlossen wegen der Be-

dingung $\sin \sphericalangle c/u < \sin \sphericalangle c/v$). Wir können auch, um die Vorstellung zu fixieren, annehmen, daß in der Ausgangslage die Richtung CD von oben gesehen nach Drehung im Sinne des Uhrzeigers durch einen konkaven Winkel in die Richtung CE übergeht. (Im anderen Falle würden wir die Ausgangslage einfach durch ihr Spiegelbild ersetzen.)

Es ist nun offenbar die absolut kleinstmögliche Entfernung $|AB|_{min} = 0$; sie ergibt sich dann, wenn die Dreiecke CAD und CAE in die Ebene $\mathfrak{S}$ fallen, und zwar entweder so, daß sie auf verschiedener oder auf derselben Seite von AC liegen. Diese Lagen wollen wir als *erste* und *dritte Grenzlage* bezeichnen.

Wir fragen ferner nach der absolut größtmöglichen Entfernung der Punkte A, B. Die halbe Entfernung $\frac{AB}{2}$ ist durch das Lot von A auf die Ebene $\mathfrak{S}$ gegeben; das Lot kann aber nicht größer sein als jedes der Lote von A auf CD oder CE, die gleich $c \cdot \sin \sphericalangle c/u$ bzw. $c \cdot \sin \sphericalangle c/v$ sind. Dann ist leicht zu sehen, daß wirklich stets $|AB|_{max} = 2c \cdot \sin \sphericalangle c/u$ ist, d. h. die Entfernung $|AB|_{max}$ wird also dann erreicht, wenn das Dreieck CAD auf der Ebene $\mathfrak{S}$ senkrecht zu stehen kommt. Zum Beweise wird man von dem einfachen stereometrischen Satze Gebrauch machen:

Es sei eine horizontale Ebene $\mathfrak{S}$ und eine sie in C schneidende nicht senkrechte Gerade c mit positiver Richtung CA und ihrer senkrechten Projektion u mit positiver Richtung CD gegeben und der konkave Winkel der beiden Richtungen mit $\sphericalangle c/u$ bezeichnet. Dann gibt es stets in der Ebene $\mathfrak{S}$ einen Strahl v durch C mit der positiven Richtung CE so, daß der konkave Winkel $\sphericalangle c/v$ einen vorgegebenen Wert besitzt, welcher der Gleichung $\sin \sphericalangle c/u < \sin \sphericalangle c/v$ genügt, wobei überdies die Richtung u nach Drehung im Sinne des Uhrzeigers durch einen konkaven Winkel in die Richtung v übergeht.

Die Entfernung $|AB|_{max}$ läßt sich zweimal erreichen, und zwar je nachdem der Punkt A oder der Punkt B oberhalb der Ebene $\mathfrak{S}$ gelegen ist. Diese beiden Lagen wollen wir als *zweite* und *vierte Grenzlage* bezeichnen.

Nach diesen Vorbemerkungen ergibt sich folgendes Resultat:

Man gewinnt einen Überblick über alle möglichen Deformationen des Kernes am einfachsten, indem man, von der ersten Grenzlage der beiden Dreiecke CAD und CAE ausgehend, einmal sie so sukzessive gegeneinander biegt, bis die zweite und dann weiterhin die dritte Grenzlage erreicht ist, wobei dann also A stets oberhalb der Ebene CDE gelegen ist, und darauf wieder von der ersten Grenzlage ausgehend so, bis die vierte und weiterhin wieder die dritte Grenzlage erreicht ist, wobei dann also A stets unterhalb der Ebene CDE gelegen ist. Die Ent-

fernung AB geht für die positive Richtung OA hierbei von 0 *über* $+2c\cdot\sin\sphericalangle c/u$ *bis* 0 *zurück, bzw. von* 0 *über* $-2c\cdot\sin\sphericalangle c/u$ *bis* 0.

Es ist leicht, diese Verhältnisse (ebenfalls später im speziellen Falle) durch ein einfach zu gewinnendes Modell sich vollends zu veranschaulichen. Man braucht nur die beiden längs AC gegeneinander geknickten Dreiecke CAD und CAE aus einem Blatt Papier auszuschneiden und die Ecken C, D, E in ein horizontales Blatt Papier, die Ebene $\mathfrak{S}$, so zu legen, daß die Ecke A bzw. oberhalb oder unterhalb dieses Blattes gelegen ist, und dann die Dreiecke gegeneinander zu biegen, wobei natürlich die Punkte C, D, E in der Ebene $\mathfrak{S}$ bleiben sollen. Dieser interessante kleine Versuch gibt überraschend anschaulich die sonst nicht leicht zu überblickenden

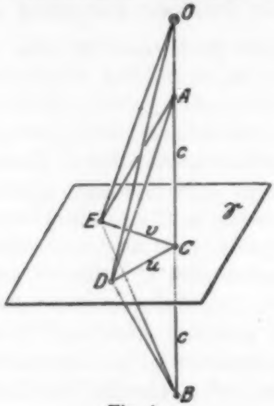


Fig. 4.

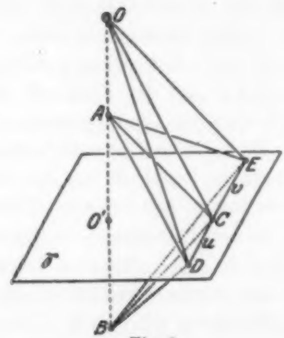


Fig. 5.

Verhältnisse wieder. Man überzeugt sich auch leicht: Das Dreieck ACE hat bei der kontinuierlichen Durchlaufung aller Deformationen des Kernes sich gegen das Dreieck ACD um die Kante AC *einmal* ganz herum gedreht und die Ecken des gedachten Dreiecks CDE folgen stets in derselben Reihenfolge aufeinander, wenn man dieses Dreieck im Sinne des Uhrzeigers von O aus gesehen umläuft.

Im speziellen Falle $\sin\sphericalangle c/u = \sin\sphericalangle c/v$ ist die Möglichkeit $\sphericalangle c/u = \sphericalangle c/v = 90^0$ auszuschließen. Es würde auch hier die Formel $|AB|_{max} = 2c\cdot\sin\sphericalangle c/u = 2c$ gelten. In der einen oder anderen der zugehörigen Grenzlagen würden dann die Punkte O, A, C, B in einer Geraden liegen. Eine solche Grenzlage (Fig. 4) würde dann jedoch insofern unbestimmt sein, als die von E bzw. D auslaufenden Stäbe gegen den übrigen Teil um die Gerade $OACB$ gedreht werden könnten. Bei der anderen Deformation des Kernes ferner, bei der die Punkte A, C, B nicht

mehr in einer Geraden liegen (Fig. 5), müßten die Punkte D und E stets in dem Lote auf der Ebene ABC im Punkte C (entweder auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von C) liegen. Dann aber wären wieder nur noch die Punkte A, B und O mit den von ihnen auslaufenden Stäben unabhängig voneinander um die Gerade DCE drehbar, d. h. es wäre gar nicht zwangläufig gewährleistet, daß die Punkte O, A, B in derselben Geraden liegen.

Es ist also jetzt im speziellen Falle

$$\sin \sphericalangle c/u = \sin \sphericalangle c/v < 1,$$

d. h. entweder

$$\sphericalangle c/u = \sphericalangle c/v \lesseqgtr 90^\circ$$

oder

$$\sphericalangle c/u + \sphericalangle c/v = 180^\circ,$$

d. h. für die Winkel haben wir also die drei Möglichkeiten, daß entweder beide spitz oder stumpf oder der eine spitz und der andere stumpf ist.

Die absolut kleinstmögliche Entfernung der Punkte A, B wird wieder durch $|AB|_{min} = 0$ gegeben. Die zugehörigen Grenzlagen des Kernes, *die erste* und *dritte Grenzlage*, haben jedoch jetzt (im Gegensatz zu dem Hauptfalle) die Eigenart, daß bei beiden Grenzlagen die Dreiecke CAD und CAE auf *verschiedenen* Seiten von AC liegen, wenn $\sphericalangle c/u = \sphericalangle c/v$ ist, dagegen auf *derselben* Seite von AC, wenn $\sphericalangle c/u + \sphericalangle c/v = 180^\circ$ ist. Die erste und dritte Grenzlage sind jedoch dadurch unterschieden, daß die Ecken des gedachten Dreiecks CDE in der Reihenfolge C, D, E bzw. E, D, C aufeinander folgen, wenn man von O aus gesehen das Dreieck CDE im Sinne des Uhrzeigers durchläuft. Die zu den beiden Grenzlagen gehörenden Kerne sind also zueinander symmetrisch.

Die absolut größtmögliche Entfernung der Punkte A, B ist wieder durch $|AB|_{max} = 2c \cdot \sin \sphericalangle c/u$ gegeben. In der zugehörigen *zweiten* und *vierten Grenzlage* des Kernes, in denen entweder A oder B oberhalb $\mathfrak{S}$ liegt, sind die Dreiecke CAD und CAE in eine Ebene zusammengefallen, die auf der Symmetrieebene senkrecht steht, und zwar liegen die Stäbe u, v entweder auf- oder aneinander, je nachdem $\sphericalangle c/u = \sphericalangle c/v$ oder $\sphericalangle c/u + \sphericalangle c/v = 180^\circ$ ist. Man sieht weiter, daß in diesen Grenzlagen dann alle Stäbe des Kernes in derselben Ebene liegen. Es wäre von einer dieser Grenzlagen ausgehend auch möglich, den Kern so zu deformieren, daß jeder einzelne der Punkte A, B, O mit den von ihnen auslaufenden Stäben um die Gerade CDE gedreht würde. Diese Deformationen, die nicht zwangläufig gewährleisten, daß die Punkte O, A, B in derselben Geraden liegen, sollen dann ebenfalls ausgeschlossen sein.

Es ist wieder leicht, den Überblick über alle möglichen Deformationen in einem Satze, analog wie im Hauptfalle auf Seite 203, zusammenzufassen.

Das Dreieck ACE hat jetzt jedoch bei der kontinuierlichen Durchlaufung aller Deformationen des Kernes sich gegen das Dreieck ACD um die Kante AC *zweimal* ganz herumgedreht. Auch sei noch hervorgehoben, daß beim Übergang von der ersten zur zweiten und von der vierten zur ersten Grenzlage die Ecken des gedachten Dreiecks CDE in der Reihenfolge C, D, E bei Umlaufung im Sinne des Uhrzeigers von O aus gesehen aufeinander folgen, sonst umgekehrt.

Wir wollen nun bei einem gegebenen räumlichen Inversor (sei es, daß der Kern dem Hauptfalle oder dem speziellen Falle angehört) noch untersuchen, *welchen Bereich der Punkt A (und analog der Punkt B) bei allen möglichen Deformationen des Inversors beherrscht.* Wir denken zunächst (außer den überhaupt festen Punkten O, O_1)

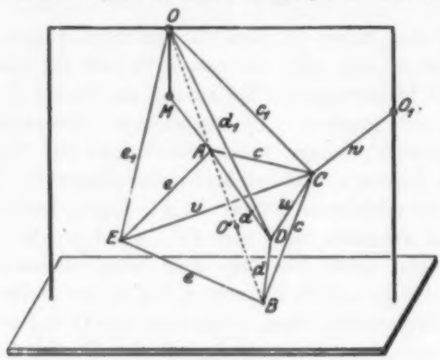


Fig. 6.

auch den Punkt C festgehalten und den Kern um OC so gedreht, daß stets der Stab CA in der Ebene des Dreiecks OO_1C, jedoch außerhalb der Dreiecksfläche liegt. (Daß CA mit OC zusammenfällt, ist ja nach unseren Festsetzungen nicht möglich.) Dann kann der Inversor nur noch solche Deformationen ausführen, daß A auf dem Kreise um C in der Ebene des Dreiecks OO_1C bleibt, und zwar kann A nur einen Kreisbogen $\widehat{A_1A_2}$ dieses Kreises beherrschen, dessen Sehne A_1A_2 durch O geht und gleich $|AB|_{max} = 2c\cdot\sin \sphericalangle c/u$ ist. Für irgendeine Lage des Punktes A auf diesem Kreisbogen gibt es offenbar *zwei* oder *eine* zugehörige Deformation des Kernes und des Inversors überhaupt, je nachdem A innerhalb des Kreisbogens liegt oder mit einem der Endpunkte A_1, A_2 zusammenfällt. Das durch Rotation dieses Kreisbogens um OC entstehende Kreisringstück ist dann der geometrische Ort aller möglichen Lagen von A, wenn noch Punkt C (außer O, O_1) festgehalten wird, und der durch Rotation dieses Kreisringstückes um OO_1 durchstrichene

Raumteil ist der geometrische Ort aller möglichen Lagen von A, wenn nur O, O_1 fest sind. (Für eine *beliebige* Lage des Punktes A in diesem Raumteil gibt es dann *vier* zugehörige Deformationen des Kernes.)

Es sei nun bei dem räumlichen Inversor noch ein 13. Stab mit dem einen Endpunkt in A angebracht, während der andere Endpunkt an einer solchen Stelle M festgehalten wird, daß $MA = MO$ ist (Fig. 6). Dann ist also der Punkt A gezwungen, auf einer durch das Inversionszentrum O gehenden Kugel sich zu bewegen. Folglich bleibt der Punkt B bei allen Deformationen des Inversors in einer bestimmten zu OM senkrechten Ebene, mit anderen Worten:

Wir haben so in diesem erweiterten Gelenksystem eine „genaue Ebenenführung“ erhalten, ein gewiß sehr interessantes Resultat.

Auf die analytische Behandlung der Deformationen des Gelenksystems durch Formeln der ebenen und sphärischen Trigonometrie, sowie auf die Veränderungen der Verhältnisse bei dem Gelenksystem, welche sich bei etwaigem Fortlassen des Stabes $w = O_1 C$ ergeben, will ich nicht weiter eingehen.

(Eingegangen am 11. 10. 1921.)

Charakteristische Eigenschaften der isotherm-konjugierten Kurvennetze.

Von

E. J. Wilczynski in Chicago.

Es sei

$$(1) \qquad D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

die sogenannte zweite fundamentale Differentialform der klassischen Flächentheorie. Wir betrachten einen Bereich R der zugehörigen Fläche S, welcher keine parabolischen Punkte enthält, so daß innerhalb R die Ungleichung gilt

$$(2) \qquad D'^2 - DD'' \neq 0.$$

Wenn, innerhalb R, D' überall gleich Null ist, bilden die Kurven $u =$ konst. und $v =$ konst. ein konjugiertes Netz. Wenn überdies das Verhältnis $D : D''$ sich darstellen läßt als Produkt einer Funktion von u allein und einer Funktion von v allein, so heißt das Netz nach Bianchi[1]) *isotherm-konjugiert*. Dieser Name soll andeuten, daß man in diesem Falle durch Einführung neuer Veränderlichen

$$\bar{u} = \varphi(u) \qquad \bar{v} = \psi(v)$$

die Form (1) in der isothermen Form

$$\lambda(\bar{u}, \bar{v})\,(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)$$

schreiben kann, ohne dabei das betrachtete Kurvennetz zu verändern. Es sind demnach

$$(3) \qquad D' = 0 \qquad \frac{\partial^2 \log D/D''}{\partial u\,\partial v} = 0$$

die analytischen Kennzeichen eines isotherm-konjugierten Netzes.

Man verdankt Bianchi ferner die Bemerkung, daß diese Eigenschaft projektiver Natur ist[2]); d. h. die Kurvennetze, welche aus einem isotherm-konjugiertem Netz durch projektive Transformation hervorgehen, sind

---

[1]) L. Bianchi. Lezioni di geometria differenziale (Seconda Edizione), Bd. I, S. 168.
[2]) ibid. S. 169.

wieder isotherm-konjugiert. Worin aber die geometrischen Kennzeichen eines solchen Netzes eigentlich bestehen, in welcher Weise es sich von anderen konjugierten Netzen unterscheidet, mit dieser Frage scheint man sich vor 1915 nicht ernstlich beschäftigt zu haben, obgleich dieselbe immer dringender wurde wegen der beständig wachsenden Kette von Theoremen, in denen der Begriff des isotherm-konjugierten Netzes auftrat. Ich werde mir erlauben, in kurzer Darstellung die neuerdings entdeckten, diese Frage betreffenden Resultate hier zu beschreiben. Die Beweise kann man dann an anderer Stelle nachlesen.

Im Jahre 1915 entdeckte der Verfasser eine merkwürdige algebraische Relation zwischen gewissen vollständig interpretierten projektiven Differentialinvarianten, welche für die isotherm-konjugierten Systeme charakteristisch ist[3]). In gewissem Sinne war hiermit das Problem schon gelöst, nicht aber in befriedigender Weise. Denn es schien nicht wahrscheinlich, daß ein so wichtiger Begriff nur in solch indirekter Weise definierbar sei. So war es als ein sehr erheblicher Fortschritt zu begrüßen, als der, leider als Jüngling verstorbene, hochbegabte Gabriel M. Green 1916 eine ganz anders geartete Interpretation formulierte, welche durchaus mit einfachen Begriffen, und in beschreibender Weise, operiert[4]). Green hat aber die Frage nicht vollständig erledigt. Es gibt nämlich einen, von ihm übersehenen, Ausnahmefall, in welchem sein Kriterium es nicht erlaubt, zwischen isotherm-konjugierten Netzen und gewissen Netzen ganz anderer Art zu unterscheiden. Es gelang dann schließlich dem Verfasser, auch diesen Ausnahmefall zu erledigen, und überdies zwei neue, weit einfachere Lösungen des Problems aufzufinden[5]).

Es sei N ein, innerhalb eines gewissen Bereiches R einer Fläche S definiertes, konjugiertes Kurvennetz, und es sei P ein Punkt des Bereiches R und t_1 und t_2 die zu P gehörigen Tangenten des Netzes N, d. h. die Tangenten der beiden Netzkurven, C_1 und C_2, welche durch P hindurchgehen. Die oskulierenden Ebenen von C_1 und C_2 schneiden sich in einer durch P hindurchgehenden Geraden l', welche die *Achse von P in bezug auf N* heißen soll. Die Achsen aller Punkte des Bereiches R bilden ein Strahlensystem, welches wir die *Achsenkongruenz* nennen wollen, und den abwickelbaren Flächen dieser Kongruenz entsprechen auf der Fläche S die Kurven

[3]) E. J. Wilczynski, The general theory of congruences. Transactions of the American Mathematical Society 16 (1915), S. 323.

[4]) G. M. Green. Projective Differential Geometry of one-parameter families of space curves and conjugate nets on a curved surface (Second Memoir), American Journal of Mathematics 38 (1916), S. 323.

[5]) E. J. Wilczynski, Geometrical Significance of isothermal conjugacy of a net of curves. American Journal of Mathematics 42 (1920), S. 211.

eines neuen Netzes. Diese Kurven, *Achsenkurven* genannt, bilden im allgemeinen kein konjugiertes System, sondern nur dann, wenn die tangentiellen Laplace-Darbouxschen Invarianten des ursprünglichen Netzes N einander gleich sind. Wir bezeichnen mit a_1 und a_2 die zu P gehörigen Achsenkurventangenten.

Alle diese Begriffe lassen sich auch dualistisch durchführen. Der oskulierenden Ebene von C_1 entspricht der Schnittpunkt P_1 der Tangentenebenen von S in drei konsekutiven Punkten von C_1. Dieser Punkt P_1 entsteht analytisch aus P durch Laplacesche Transformation. Ebenso erhält man aus P einen zweiten Punkt P_{-1}, entsprechend der Kurve C_2, durch die inverse Laplacesche Transformation. Die Punkte P_1 und P_{-1} definieren eine Gerade l in der Tangentenebene des Punktes P. Diese Gerade, welche l' dualistisch gegenübersteht, soll der *Strahl von P in bezug auf N* heißen. Die Strahlen aller Punkte von S bilden die *Strahlenkongruenz*, und den abwickelbaren Flächen dieser Kongruenz entsprechen auf S die *Strahlenkurven*. Dieselben bilden nur dann ein konjugiertes Netz, wenn die Laplace-Darbouxschen Punktinvarianten von N einander gleich sind. Wir bezeichnen mit s_1 und s_2 die zu P gehörigen Strahlentangenten[6]). Neben a_1, a_2 und s_1, s_2, den Achsen- und Strahlentangenten, führen wir noch die *Gegenachsen-* und *Gegenstrahlentangenten*[7]), a_1', a_2' und s_1', s_1' ein. Dabei bedeutet a_1' die zu a_1 in bezug auf t_1 und t_2 harmonische Flächentangente, usw.

Es seien h_1, h_2 die zu P gehörigen Haupttangenten der Fläche S. Natürlich werden h_1, h_2 von t_1 und t_2 harmonisch getrennt. Es gibt ein eindeutig bestimmtes konjugiertes System, dessen Tangenten in P, t_1', t_2', nicht nur von h_1, h_2, sondern auch von t_1, t_2 harmonisch geteilt werden. Dieses neue konjugierte Netz N' soll das *begleitende konjugierte Netz*[8]) heißen.

Green hat nun den folgenden Satz bewiesen: *Wenn das Netz N isotherm-konjugiert ist, bilden in jedem Flächenpunkt P die Achsentangenten (a_1, a_2), die Gegenstrahltangenten (s_1^1, s_2^1) und die Tangenten (t_1^1, t_2^1) des begleitenden konjugierten Netzes drei Paare einer Involution*[9]).

Green hat aber auch die Umkehrung dieses Satzes ausgesprochen; dabei ist ihm aber entgangen, daß es auch noch andere konjugierte Netze (nicht

---

[6]) Alle diese Begriffe und Sätze treten zuerst auf in der oben zitierten Arbeit des Verfassers. Transactions 16 (1915).

[7]) Dieser Begriff ist von Green eingeführt worden.

[8]) Dieser Begriff zuerst in E. J. Wilczynski, Sur la théorie générale des Congruences. Mémoires de l'Académie Royale de Belgique (2) 3 (1911), S. 59. Der Name rührt von Green her.

[9]) In diesem Satze darf man die drei Paare $a_1, a_2)$, (s_1', s_2'), (t_1', t_2') auch durch (a_1', a_2'), (s_1, s_2), (t_1', t_2') ersetzen.

isotherm-konjugierte) gibt, welche die gleichen Eigenschaften besitzen. Es sind das solche konjugierte Netze, in welchen die Tangentenpaare (a_1, a_2) und (t_1, t_2) sowohl wie (s_1, s_2) und (t_1, t_2) einander harmonisch teilen. Ich habe solche Netze als *harmonisch-konjugierte* Netze bezeichnet, und es kommt also jetzt darauf an, zwischen isotherm-konjugierten und harmonisch-konjugierten Netzes geometrisch zu unterscheiden.

In den einfachsten Fällen genügt es, hierzu ein weiteres Theorem von Green anzuwenden. Green hat nämlich gezeigt, daß *das begleitende konjugierte Netz eines isotherm-konjugierten Netzes gleichfalls isotherm-konjugiert ist, und umgekehrt*. Man erhält deshalb eine zweite Involution, welche mit dem begleitenden Netze zusammenhängt. Dabei treten aber weitere Ausnahmefälle auf.

Um alle diese Ausnahmefälle zu erledigen, führen wir einen neuen Begriff ein, den Begriff eines *Büschels von konjugierten Netzen*. *Darunter verstehen wir eine eingliedrige* Schar von konjugierten Netzen N_k, der Art, daß die zum Punkte P und zum Netze N_k gehörigen Tangenten (t_{k1}, t_{k2}) mit (t_1, t_2) ein konstantes, d. h. von der Lage von P unabhängiges, Doppelverhältnis k bestimmen.

Man kann dann beweisen, daß *alle eigentlichen Netze eines Büschels isotherm-konjugiert sind, wenn eines derselben, z. B. N, isotherm-konjugiert ist*[10]. Ferner läßt sich zeigen, *daß alle Netze eines Büschels nur dann harmonisch sein können, wenn sie gleichzeitig auch isotherm-konjugiert sind*[11]. Aus diesen Sätzen folgt das folgende Theorem: *Nicht nur das Netz N selber, sondern alle Netze des von ihm bestimmten Büschels, besitzen die Greensche Eigenschaft, daß die entsprechenden Tangenten (a_1, a_2), (s_1', s_2'), und (t_1', t_2') drei Paare einer Involution bilden. Umgekehrt, besitzen alle Netze des von N bestimmten Büschels die Greensche Eigenschaft, so ist N isotherm-konjugiert.*

Damit ist die Sache im Sinne Greens erledigt. Wir erhalten aber zwei weitere, sehr elegante Lösungen unseres Problems, wenn wir den Begriff des Büschels konjugierter Systeme noch etwas weiter studieren. Die oskulierenden Ebenen der Kurven eines solchen Büschels, welche durch den Punkt P hindurchgehen, bilden ein eingliedriges System von Ebenen und umhüllen eine Kegelfläche dritter Klasse und vierter Ordnung mit P als

[10]) Am. Jour. of Mathematics **42** (1920), S. 218, Theorem 5.

[11]) Ebendaselbst S. 221, Theorem 10. Dieser Satz wird dort ohne Beweis angeführt. Der Beweis wird geliefert werden in einer Arbeit des Herrn E. P. Lane, A general theory of conjugate nets, welche bald in den Transactions of the American Mathematical Society erscheinen soll. Daselbst erscheinen auch die Beweise der folgenden hier zitierten Sätze. Ich habe meine eigenen Beweise dreier Sätze zurückgezogen, weil Lanes Darstellung viel einfacher ist als die meinige.

Spitze. Diese Kegelfläche berührt die Tangentenebene des Punktes P doppelt, und zwar bilden die beiden Haupttangenten von P die Berührungselemente. Ein solcher Kegel besitzt drei singuläre Erzeugende; die drei entsprechenden Kuspidaltangentenebenen des Kegels schneiden sich in einer geraden Linie durch P, welche wir die *Spitzenachse* des Punktes P nennen wollen. Indem man jedem Punkte der Fläche seine Spitzenachse zuordnet, erhält man eine neue Kongruenz, die *Spitzenachsenkongruenz*. Den abwickelbaren Flächen dieser Kongruenz entsprechen auf S die Kurven, welche *Spitzenachsenkurven* genannt werden sollen. Führt man dies alles analytisch aus, so ergibt sich das folgende Theorem:

Die mit einem konjugierten Netze N zusammenhängenden Spitzenachsenkurven bilden im allgemeinen kein konjugiertes Netz. Sie tun das dann und nur dann, wenn das Netz N isotherm-konjugiert ist.

Die zweite, oben angedeutete und noch nicht diskutierte Lösung unseres Problems ergibt sich hieraus durch dualistische Begriffsbildung. Wir haben schon bemerkt, daß dualistisch der oskulierenden Ebene einer Flächenkurve ein Punkt P_1 in der Tangentenebene von P entspricht. Bestimmt man diesen Punkt für jede, durch P hindurchgehende Kurve aller konjugierten Netze des durch N bestimmten Büschels, so ergibt sich als ihr Ort eine Kurve dritter Ordnung und vierter Klasse in der Tangentenebene des Punktes P. Dieselbe besitzt P als Doppelpunkt, und die entsprechenden Haupttangenten als Doppelpunkttangenten. Sie besitzt außerdem drei Wendepunkte, welche auf einer Geraden liegen. Diese Gerade wollen wir den *Wendepunktstrahl* von P nennen. Läßt man jedem Punkte von S seinen Wendepunktstrahl entsprechen, so erhält man die *Wendepunktstrahlenkongruenz*. Man findet auf diese Weise das folgende Theorem:

Den abwickelbaren Flächen der durch das konjugierte Netz N bestimmten Wendepunktstrahlenkongruenz entspricht auf der Fläche S ein konjugiertes Netz dann und nur dann, wenn das Netz N isotherm-konjugiert ist.

(Eingegangen am 2. 7. 1921.)

Geometria proiettivo-differenziale di una superficie V_2 nello spazio S_4 a quattro dimensioni.

Von

Guido Fubini in Turin.

1. In recenti lavori io ho dato[1]) alcuni metodi per lo studio delle superficie dello spazio ordinario, delle ipersuperficie di uno spazio S_n ad $n > 3$ dimensioni, dei sistemi di rette. Tali metodi assumono, come definizione dell' ente che si studia, un sistema di forme differenziali (invarianti per collineazioni), per mezzo delle quali si può costruire tutta la geometria proiettivo-differenziale dell' ente studiato. Tra l'altro si fissano quelle che io chiamo coordinate *normali* di un suo punto e si deducono delle equazioni differenziali, a cui soddisfano le coordinate di un punto generico dell' ente che si studia; l'assumere invece queste equazioni per punto di partenza sembra a me portare una complicazione alla teoria, così come avverrebbe nella geometria metrica, se invece dei coefficienti E, F, G dell' elemento lineare di Gauss di una superficie si assumessero a punto di partenza i valori dei simboli $\left\{ {ik \atop h} \right\}$ di Christoffel. I miei metodi non soltanto sono di facile applicazione alle superficie ed ipersuperficie, ma anche, come è detto nei lavori citati, in molti altri casi. Qui ne farò un' applicazioni alle superficie V_2 di uno spazio S_4 a quattro dimensioni.

2. Se $g = \sum_{r,s} a_{rs} du_r du_s (r, s = 1, 2)$ è una forma differenziale quadratica con $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$, io, come nei lavori citati, indicherò con $\left\{ {rs \atop i} \right\}$ i simboli di Christoffel, e *chiamerò differenziali controvarianti* i

$$\delta u_i = du_i, \quad \delta^2 u_i = d^2 u_i + \sum_{r,s} \left\{ {rs \atop i} \right\} du_r du_s, \text{ ecc.}$$

[1]) Cfr. le mie Note dei *Rend. della R. Accad. dei Lincei* del 1920 e 1921 e la Memoria: „*Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale*" nei *Rend. del Circolo Matem. di Palermo* **43**, ove si trovano citati i miei precedenti lavori.

perchè essi formano sistemi controvarianti. Se b_r e c_{rs} sono sistemi covarianti, allora

$$b_{rs} = \frac{\partial b_r}{\partial u_s} - \sum_t \left\{ {rs \atop t} \right\} b_t, \quad c_{rst} = \frac{\partial c_{rs}}{\partial x_t} - \sum_p \left[\left\{ {rt \atop p} \right\} c_{ps} + \left\{ {st \atop p} \right\} c_{pr} \right],$$

sono pure *covarianti*, e si dicono ottenuti derivando *covariantemente*.

Si noti che

$$d\,\Sigma\, b_r\, du_r = \Sigma\, b_r\, \delta^2 u_r + \Sigma\, b_{rs}\, du_r\, du_s, \text{ e analoghe:}$$

che cioè valgono le solite regole di differenziazione, quando si sostituiscano alle derivate e ai differenziali le derivate covarianti e i differenziali controvarianti. Con $a^{(rs)}$ indico il complemento algebrico di a_{rs} nel determinante $|a_{rs}|$ diviso per questo determinante; se b_r è covariante, con $b^{(r)} = \sum a^{(rs)} b_s$ indico il sistema controvariante duale.

Supposto $a_{11} = a_{22} = 0$, valgono le identità:

$$\Sigma\, b_{rs}\, du_r\, du_s = b_{11}\, du_1^2 + b_{22}\, du_2^2 + \frac{b_{12}}{a_{12}}\, g,$$

$$\Sigma\, b_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t = b_{111}\, du_1^3 + b_{222}\, du_2^3 + \frac{3}{2a_{12}} (b_{112}\, du + b_{221}\, dv)\, g,$$

$$\Sigma\, b_{rsthk}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_h\, du_k = b_{11111}\, du_1^5 + b_{22222}\, du_2^5$$
$$+ \frac{5}{2a_{12}} (b_{11112}\, du + b_{22221}\, dv) g + \frac{10}{4a_{12}^2} (b_{11122}\, du + b_{22211}\, dv) g^2.$$

Nel caso generale di a_{11}, a_{22} qualsiasi si hanno le formole analoghe:

$$\Phi_2 = \Sigma\, b_{rs}\, du_r\, du_s = \Sigma\, \bar{b}_{rs}\, du_r\, du_s + \frac{1}{2} I_0\, g,$$

ove

$$I_0 = \Sigma\, a^{(rs)} b_{rs}, \qquad \bar{b}_{rs} = b_{rs} - \frac{1}{2} I_0\, a_{rs},$$

e quindi:

$$\Sigma\, a^{(rs)} \bar{b}_{rs} = 0,$$

$$\Phi_3 = \Sigma\, b_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t = \Sigma\, \bar{b}_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t + \frac{3}{4} J_1\, g,$$

ove

$$J_1 = \Sigma\, a^{(rs)} b_{rst}\, du_t,$$

e le $\bar{b}$ soddisfano alle $\sum_{r,s} a^{(rs)} \bar{b}_{rst} = 0$,

$$\Phi_5 = \Sigma\, b_{rsthk}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_h\, du_k = \Sigma\, \bar{b}_{rsthk}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_h\, du_k$$
$$+ \frac{5}{4} g\, K_3 + \frac{5}{8} g^2\, K_1,$$

ove

$$K_1 = \Sigma\, a^{(rs)} a^{(hk)} b_{rsthk}\, du_t; \quad K_3 = \Sigma\, a^{(rs)} b_{rsthk}\, du_t\, du_h\, du_k - \frac{3}{4} g\, K_1$$

e le $\bar{b}$ soddisfano alle $\sum_{r,s} a^{(rs)} \bar{b}_{rsthk} = 0$.

Queste formole hanno significato *intrinseco*, cioè indipendente dalle variabili scelte come coordinate; le forme coi coefficienti b sono *coniugate*, od *apolari* alla g; esse si diranno i resti ottenuti dividendo *covariantemente* le forme Φ per g.

3. Siano x, y, z, t, w coordinate *omogenee* in S_4. Se esse sono funzioni indipendenti di due parametri $u = u_1$ e $v = u_2$, il punto $(x, y, \ldots)$ genererà, al variare di u_i, una superficie V_2 in S_4. Con x_u, x_{uu}, ecc. indicheremo le derivate solite, con x_1, x_{11} ecc. le derivate covarianti secondo una forma g, che sceglieremo ad arbitrio tra le forme proporzionali al determinante $(x, x_u, x_v, dx_u, dx_v)$. Con questa notazione indico il determinante, di cui i termini qui scritti formano la prima riga, e le altre righe se ne deducono sostituendo successivamente alla x le y, z, t, w. Con notazioni analoghe indicherò matrici o determinanti analoghi. Se $\pm \Delta$ è il discriminante di g, porrò, *supposto* $\Delta \neq 0$:

$$(1) \qquad F_3 = \frac{1}{\Delta}(x, x_u, x_v, dx_u, dx_v) = \frac{1}{\Delta}(x, x_1, x_2, \Sigma x_{1r} du_r, \Sigma x_{2r} du_r).$$

Questa forma è *intrinseca*, cioè ha un significato indipendente dalla scelta delle coordinate u_i. *Se mutiamo g in una forma $g' = \sigma g$ proporzionale, la F_3 si muta in $F_3 = \frac{1}{\sigma^2} F_3$; se eseguiamo una collineazione di determinante ϱ, la F_3 si muta in $F_3' = \varrho F_3$.*

Se alla matrice a 5 righe 6 colonne $(x, x_1, x_2, x_{11}, x_{12}, x_{22})$ aggiungiamo una delle sue righe, otteniamo un determinante con due righe uguali, e quindi nullo. Sviluppandolo secondo la riga aggiunta, si ha:

$$(2) \qquad I_0^x = \Sigma a^{(rs)} x_{rs} = 2 \Sigma \lambda^{(r)} x_r + \mu x = 2 \Sigma \lambda_r a^{(rs)} x_s + \mu x,$$

(ove è inutile precisare i valori delle λ, μ), insieme alle equazioni che se ne deducono sostituendo alla x la y, o la z, o la t, o la w.

Ne segue, derivando covariantemente:

$$(3) \qquad \sum_{r,s} a^{(rs)} x_{rst} = 2 \sum_r \lambda^{(r)} x_{rt} + 2 \sum_{r,s} \lambda_{rt} a^{(rs)} x_s + \mu_t x + \mu x_t.$$

Sarà pure *intrinseca* la forma

$$(4) \qquad A_5 = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(x, x_1, x_2, d^2 x, d^3 x),$$

che si muta nella $A_5' = \frac{1}{\sigma} A_5$ (se g si muta in σg) oppure in $A_5' = \varrho A_5$ se si esegue una collineazione di determinante ϱ.

Osservando che

$$d^2 x = \Sigma x_r \delta^2 u_r + \Sigma x_{rs} du_r du_s, \quad d^3 x = \Sigma x_r \delta^3 u_r + 3 \Sigma x_{rs} du_r \delta^2 u_s \\ + \Sigma x_{rst} du_r du_s du_t,$$

si trova:

$$(5)\qquad \Lambda_5 = 3F_2 H + \Phi_5,$$

ove

$$H = \sqrt{\Delta}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u),$$

$$\Phi_5 = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(x, x_1, x_2, \Sigma x_{rs} du_r du_s, \Sigma x_{rst} du_r du_s du_t).$$

Poichè H ha, come Λ_5, significato intrinseco, altrettanto avverrà di Φ_5, il quale, su Λ_5, ha il vantaggio di dipendere dai soli differenziali primi. Eseguendo una collineazione di determinante ϱ, la H non cambia; e perciò Φ_5 si muta in $\Phi_5' = \varrho\,\Phi_5$, analogamente ad F_2 e Λ_5. Se alla g sostituiamo la $g' = \sigma g$, allora H si muta in

$$H' = \sigma H - \frac{1}{2} g(\sigma^2 du - \sigma^1 dv)\sqrt{\Delta},$$

ove σ^2, σ^1 sono il sistema controvariante duale del sistema delle derivate di σ.

Perciò il valore corrispondente di Φ_5 sarà:

$$(6)\qquad \Phi_5' = \Lambda_5' - 3H'F_2' = \frac{1}{\sigma}\Lambda_5 - \frac{3}{\sigma} H F_2 + \frac{3\sqrt{\Delta}}{2\sigma^2} g F_2 (\sigma^2 du - \sigma^1 dv)$$
$$= \frac{1}{\sigma}\Phi_5 + \frac{3\sqrt{\Delta}}{2\sigma^2}(\sigma^2 du - \sigma^1 dv) g F_2.$$

Cioè $\Phi_5' - \frac{1}{\sigma}\Phi_5$ *non è nullo* $\left(\text{come } \Lambda_5' - \frac{1}{\sigma}\Lambda_5\right)$, ma è divisibile per gF_2 ossia per g^2 oppure F_2^2, perchè g è proporzionale ad F_2. Cerchiamo di sostituire a Φ_5 una forma, ancora *intrinseca* e del *primo ordine*, di comportamento più semplice. Con notazioni analoghe a quelle del § 3, posto $I_0^x = \Sigma a^{(rs)} x_{rs}$, $J_1^x = \Sigma a^{(rs)} x_{rst} du_t$, ecc., indicato con $\Sigma \bar{x}_{rs} du_r du_s$ il resto ottenuto dividendo $\Sigma x_{rs} du_r du_s$ covariantemente per g, ecc., si ha:

$$\Phi_5 = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(x, x_1, x_2, \Sigma x_{rs} du_r du_s, \frac{3}{4} g J_1^x + \Sigma \bar{x}_{rst} du_r du_s du_t).$$

Essendo, per la (3), $J_1^x - \Sigma \lambda^{(r)} dx_r$ combinazione lineare delle x, x_r, è:

$$\Phi_5 = \frac{3}{4}\frac{g}{\sqrt{\Delta}}(x, x_1, x_2, dx_1 du_1 + dx_2 du_2, \lambda^{(1)} dx_1 + \lambda^{(2)} dx_2)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(x, x_1, x_2, \frac{1}{2} I_0^x g + \Sigma \bar{x}_{rs} du_r du_s, \Sigma \bar{x}_{rst} du_r du_s du_t).$$

Poichè, per (2), I_0^x è combinazione lineare delle x, x_r, si trova ricordando (1):

$$\Phi_5 = \frac{3}{4} g F_2 (\lambda^{(2)} du_1 - \lambda^{(1)} du_2)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(x, x_1, x_2, \Sigma \bar{x}_{rs} du_r du_s, \Sigma \bar{x}_{rst} du_r du_s du_t).$$

Il secondo addendo, per le $\sum_{r,s} a^{(rs)} \bar{x}_{rs} = \sum_{r,s} a^{(rs)} \bar{x}_{rst} = 0$, è una forma del tipo $F_5 + \frac{5}{8} g^2 K_1$ (cioè la K_3 del § 3 è in questo caso nulla) ove F_5 è coniugata alle g, F_2. Se ne deduce che anche Φ_5 è una forma dello stesso tipo; la (6) dimostra, che *al variare di* g, può variare K_1 in modo complicato, mentre *il resto* F_5 (*ottenuto dividendo covariantemente* Φ_5 *per* g) *resta semplicemente diviso per* σ. Dunque *il rapporto tra il discriminante di* F_5 *e il quadrato del discriminante di* F_2 *non dipende dalla scelta di* g, mentre evidentemente, eseguendo una collineazione di determinante ϱ, che moltiplica F_2 ed F_5 per ϱ, *tale rapporto resta moltiplicato per* ϱ^4. Potremo scegliere tale collineazione in modo da rendere tale rapporto uguale ad 1 (oppure a -1); *le* $x, y, \ldots, w$ *resteranno definite* a meno di una collineazione a coefficienti *costanti*, *senza alcun fattore comune*, che potrebbe esser *funzione* delle u_i. Tali coordinate si possono chiamare coordinate *proiettive normali* (l'analogo delle cartesiane in geometria metrica). Fanno eccezione i casi che F_2 od F_5 abbiano *discriminante nullo* (caso analogo a quello delle rigate di S_3). Scelte così le coordinate *normali* $x, \ldots, w$, potremo poi alla g sostituire una forma $g' = \sigma g$ in guisa che la forma $F_2' = \frac{2}{\sigma^2} F_2$ corrispondente sia uguale a g' (ponendo $\sigma^3 = F : g$). Così supporremo di aver fatto; e siano f_2, φ_5, f_5 i valori corrispondenti di F_2, Φ_5, F_5; sia $\pm \Delta$ il discriminante di $f_2 = g$. Sarà

$$f_2 = \frac{1}{\Delta}(x, x_1, x_2, dx_1, dx_2); \qquad \varphi_5 = f_5 + f_1 f_2^2,$$

ove f_1 è una forma di primo grado. *Si sono così determinate tre forme* f_1, f_2, f_5 (di cui f_5 *coniugata* ad f_2) *intrinseche, cioè di significato indipendente dalla scelta delle* u_i, *ed invarianti* (per collineazioni). Noi dimostreremo *che, almeno in generale, queste forme determinano la* V_2.

Assumiamo a variabili u_i quelle che annullano f_2 (*le linee* u_i *sono cioè un sistema coniugato su tutte le superficie ottenute proiettando* V_2 *su un* S_3). Supponiamo $a_{11} = a_{22} = 0$, e poniamo $a_{12} = a$, $\mu = 2\nu a$. La (2) diventa:

$$x_{uv} = \lambda_2 x_u + \lambda_1 x_v + \nu x. \tag{7}$$

Noi possiamo determinare delle quantità $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ in guisa che

$$\begin{cases} x_{uuu} = \alpha x_{uu} + \beta x_{vv} + l x_u + m x_v + n x \\ x_{vvv} = \gamma x_{uu} + \varepsilon x_{vv} + M x_u + L x_v + N x \end{cases} \tag{8}$$

insieme alle analoghe in $y, z, \ldots$ Se noi riusciamo a calcolare le $\alpha, \beta, \ldots$, la V_2 sarà completamente determinata (a meno di una collineazione). Ora:

$$(x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv}) = 2a^3. \tag{9}$$

E, se $f_3 = A du^3 + B dv^3$, $f_1 = C du + D dv$, è:

$$
\begin{array}{ll}
 & Aa = (x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{uuu}); \quad Bb = (x, x_u, x_v, x_{vv}, x_{vvv}) \\
(10) & 4Ca^3 = 3(x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{uvv}) + (x, x_u, x_v, x_{vv}, x_{uuu}) \\
 & 4Da^3 = 3(x, x_u, x_v, x_{vv}, x_{vuu}) + (x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{vvv}).
\end{array}
$$

Dalle prime due delle (10), in virtù di (8), (9) si trae:

$$\beta = A : 2a^2 \qquad \gamma = - B : 2a^2. \tag{11}$$

Tenendo conto delle equazioni ottenute derivando (7), le ultime delle (8) danno:

$$2Ca = 3\lambda_1 - \alpha \qquad 2Da = - 3\lambda_2 + \varepsilon. \tag{11bis}$$

Derivando (9), e ricordando le altre equazioni si avrà:

$$3\frac{\partial \log a}{\partial u} = 2\lambda_1 + \alpha \qquad 3\frac{\partial \log a}{\partial v} = 2\lambda_2 + \varepsilon. \tag{11ter}$$

Le (11) dimostrano che, note le f, restano completamente determinate le $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2$. Scriviamo ora le condizioni di integrabilità delle (7), (8): che cioè valgono le identità $(x_{uv})_{uu} = (x_{uuu})_v$ e $(x_{uv})_{vv} = (x_{vvv})_u$. Paragonando nella prima i coefficienti di x_{uu}, o nella seconda quelli di x_{vv}, si trova ν. Paragonando i coefficienti di x_u nella prima e quelli di x_v nella seconda, si trova che $l_v = P$, $L_u = Q$ ove P, Q sono quantità note. Paragonando gli altri coefficienti, si trova che:

$$\beta L + l\lambda_1 + n = R; \quad \gamma l + L l_2 + N = S; \quad \lambda_2 n - n_v - \beta N - l\nu = T;$$
$$\lambda_1 N - N_u - \gamma n - L\nu = H,$$

ove R, S, T, H sono quantità note. Sostituendo nelle ultime due equazioni i valori delle n, N tratti dalle prime, si trova che, oltre alle

$$l_v = P, \qquad L_u = Q \tag{12}$$

risultano determinate le

$$
\begin{array}{ll}
 & (\beta L)_v + l\left(- \lambda_1\lambda_2 + \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} + \beta\gamma - \nu\right) = V, \\
(13) & \\
 & (\gamma l)_u + L\left(- \lambda_1\lambda_2 + \frac{\partial \lambda_2}{\partial u} + \beta\gamma - \nu\right) = W.
\end{array}
$$

Si trovano così le equazioni nelle sole due incognite l, L. Le (13) derivate l' una rispetto a v, l' altra rispetto ad u, tenendo conto delle (12), danno due nuove equazioni, che insieme alle stesse (13), costituiscono un sistema di quattro equazioni *lineari* nelle l, L; l_u, L_v; che in generale le determineranno. Bisognerebbe studiare i casi di indeterminazione, e scrivere le condizioni di *integrabilità*, che sarebbero nel caso nostro *l' analogo delle equazioni di Gauss e di Codazzi* della solita geometria differenziale.

4. Diamo ora un cenno delle particolari V_2, cui non è applicabile la nostra teoria. Il caso che il discriminante di F_3 sia nullo, da noi già escluso, corrisponde al caso che sia $A = 0$ (oppure $B = 0$). Se $A = 0$, la (10) prova che le $x, y, \ldots.$ soddisfano a un' equazione:

$$(14) \qquad x_{uuu} + E x_{uu} + F x_u + G x_v + H x = 0.$$

Se fosse $G \neq 0$, si risolva rispetto ad x_v, si derivi rispetto ad u; si otterrà x_{uv}, cioè $\lambda_2 x_u + \lambda_1 x_v + \nu x$ come combinazione lineare di x, x_u, x_{uu}, x_{uuu}, x_{uuuu}. Ora, se $G \neq 0$, $\lambda_2 x_u + \lambda_1 x_v + \nu x$ è per (14) combinazione lineare di x, x_u, x_{uu}, x_{uuu}. Quindi, se $G \neq 0$, le $x, y, \ldots$ soddisfano a un' eqnazione

$$\frac{\partial^4 x}{\partial u^4} + E_1 \frac{\partial^3 x}{\partial u^3} + E_2 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + E_3 \frac{\partial x}{\partial u} + E_4 x = 0,$$

ossia esistono delle funzioni r_i della sola v tali che:

$$(15) \qquad r_1 x + r_2 y + r_3 z + r_4 t + r_5 w = 0.$$

Alla (15) soddisferebbero anche le $\frac{\partial^i x}{\partial u^i}$, $\frac{\partial^i y}{\partial u^i}$ ecc. per $i = 1, 2, 3$, e quindi anche, per (14), le x_v, y_v ecc.; e quindi, derivando (15), si avrebbe:

$$(16) \qquad \frac{\partial r_1}{\partial v} x + \frac{\partial r_2}{\partial v} y + \cdots + \frac{\partial r_5}{\partial v} w = 0.$$

Se le (15), (16) differissero solo per un fattore, la V_2 apparterrebbe ad un S_3. Così non essendo, le (15), (16) sono distinte; e quindi ***le linee $v =$ cost. appartengono a un piano S_2 (a due dimensioni)***; conclusione identica a quella che si otterebbe dalla (14) nel caso $G = 0$, e quindi vera generalmente. Se fosse $A = B = 0$, analoga conclusione varrebbe per le $u =$ cost. Il caso di F_2 a discriminante nullo, che qui abbiamo escluso, è quello in cui le $x, y, \ldots,$ soddisfano a un' equazione (2) di tipo parabolico; ed è pur facile caratterizzare le V_2 per cui F_2 è nullo identicamente.

5. Sia O un punto di V_2 e ne siano O', O'' i punti consecutivi sulla $u =$ cost. e sulla $v =$ cost. uscenti da O. Indicando un punto con la sua prima coordinata, i punti O, O', O'' sono i punti x, $x + x_v dv$, $x + x_u du$. Le tangenti in O, O' alle $v =$ cost. uscenti da O, O' si incontrano (cfr. la 7) nel punto $x' = x_u - \lambda_1 x$; così le tangenti in O, O'' alle $u =$ const. si incontrano nel punto $x'' = x_v - \lambda_2 x$. Tali punti x', x'' generano due superficie, a cui corrispondono le due equazioni che si deducono da (7) con una ***trasformazione di Laplace***. La trasformazione di Laplace può ricevere qui un' altra interpretazione. Da (7) si deduce che i piani S_2 tangenti a V_2 in O, O'' e i piani osculatori alle $v =$ cost. uscenti da O, O' giacciono tutti nell' ***iperpiano*** π passante per i punti x, x_u, x_v, x_{uu}; e le

coordinate $\xi, \eta, \ldots$ del quale sono perciò proporzionali ai minori della matrice (x, x_u, x_v, x_{uu}).

In modo simile si definisce un' iperpiano π', le cui coordinate $\xi', \eta', \ldots$ sono proporzionali ai minori di (x, x_u, x_v, x_{vv}). L' iperpiano di coordinate $\xi_u, \eta_u, \ldots$ e quello di coordinate $\xi'_v, \eta'_v, \ldots$ sono evidentemente per la (7) iperpiani del fascio determinato da π, π'. Perciò valgono equazioni del tipo:

$$\xi_u = l\xi + m\xi' \qquad \xi'_v = L\xi + M\xi' \qquad \text{(e analoghe in } \eta, \ldots).$$

Perciò *le coordinate di π e π' soddisfano a due equazioni di Laplace* del tipo (2) *trasformate di Laplace l' una dell' altra.*

Si dovrebbe completare il nostro studio, considerando la V_2 come *ipersuperficie* inviluppo degli ω^3 iperpiani formati dagli ω^2 fasci determinati per ogni punto O di V_2 dai corrispondenti iperpiani π, π' ed applicando i metodi delle mie Mem. cit. validi per le ipersuperficie.

6. Sia O un punto di V_2; si scelgano a iperpiani $z = 0$, $t = 0$ gli iperpiani π, π', ad assi delle x, y le tangenti alle linee $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ uscenti da O. Supposto $w = 1$ (ciò che equivale a usare coordinate non omogenee), varranno degli sviluppi in serie del tipo:

$$z = x^2 + Ay^3 + bx^2y + cxy^2 + ex^3 + \cdots;$$
$$t = y^2 + Bx^3 + gx^2y + \gamma xy^2 + \varepsilon y^3 + \cdots;$$

ove i termini trascurati sono almeno del quart' ordine. Con una conveniente collineazione (che non muti i piani $z = 0$, $t = 0$ e gli assi delle x, y)

$$x = (x' + \lambda z' + \mu t') : w'; \qquad y = (y' + lz' + mt') : w'; \qquad z = z' : w';$$
$$t = t' : w'; \qquad w' = w + hx + ky + rz + st$$

si possono annullare $b, c, e, g, \gamma, \varepsilon$ (restando ancora arbitrarie *le sole* r, s). Gli sviluppi si riducono, trascurando i termini del quart' ordine, alle:

$$z = x^2 + Ay^3 + \cdots; \qquad t = y^2 + Bx^3 + \cdots.$$

L' iperpiano $w = 0$ può variare nella stella $w + rz + st = 0$ ($r, s = \text{cost.}$), cioè resta fissata una retta $z = t = w = 0$ del piano tangente in O in modo *invariante per collineazioni*. Posto poi $g = -(x, x_1, x_2, dx_u, dx_v)$ con $u = x$, $v = y$ sarà $g = 4\,dx\,dy + \cdots$, ove i termini trascurati si annullano in O almeno del second' ordine, cosicchè in O sara $\delta^2 x = d^2 x$, $\delta^2 y = d^2 y$. Paragonando i valori di $d^2 z, d^3 z, \ldots$ scritti o coi differenziali ordinarii o con quelli controvarianti, si trova (essendo nulle in O le $z_x, z_y, \ldots$) che le derivate seconde e terze delle z, t in O rispetto x, y coincidono con le derivate covarianti. Un facile calcolo prova così che

$F_5 = A\,dy^5 - B\,dx^5$; e ciò permette di caratterizzare nel modo più semplice le direzioni che annullano F_5 (e che, insieme a quelle che annullano F_2, sono l' elemento essenziale della geometria proiettiva delle V_2 in S_4). Esse godono della seguente proprietà geometrica, che le caratterizza. *Se* $x + \mu y = 0$ *passa per una tale direzione* (se cioè $A + B\mu^5 = 0$), *esiste un iperpiano tangente a* V_2 (precisamente l' iperpiano $z - \mu^2 t = 0$) *che ha un contatto quadripunto con l' intersezione di* V_2 *e dell' iperpiano* $x + \mu y = 0$.

Le linee invece, che annullano F_2, sono, come è noto, quelle *che formano un sistema coniugato su tutte le proiezioni di* V_2 *su un* S_3.

Lo studio delle V_2 *in* S_4 *è così ridotto ad un sistema di forme differenziali del primo ordine, che sono suscettibili di una semplicissima definizione geometrica.*

(Eingegangen am 14. 6. 1921.)

Über die Gravitation ruhender Massen.

Von

C. Runge in Göttingen.

Einstein hat gezeigt[1]), wie man aus einem vorgegebenen Energietensor die Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ in erster Annäherung finden kann. Besteht die Energie nur aus ruhender Materie, so hat man, wie in der klassischen Mechanik, das Gravitationspotential

$$u = -K\int\frac{dm}{r}$$

zu berechnen $\left(K = \frac{1}{8\pi}1{,}87\cdot10^{-27}\,\mathrm{cmg}^{-1}\right.$, wobei die Zeiteinheit so gewählt ist, daß die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 wird$\left.\right)$ und erhält dann für das Quadrat des vierdimensionalen Bogenelements

$$(1+2u)dt^2-(1-2u)(dx^2+dy^2+dz^2),$$

wo x, y, z rechtwinklige Raumkoordinaten und t die Maßzahl der Zeit bedeuten.

Dieses Bogenelement ist für die Gravitation eines Massenpunktes zuerst von de Sitter angegeben worden.

Die Annäherung gilt nur für hinreichend kleine Werte von u, d. h. wenn das von den ruhenden Massen angezogene hinreichend klein anzunehmende Massenteilchen den anziehenden Massen nicht zu nahe kommt. Für den Merkur z. B. ist u schon zu groß, um die Perihelbewegung noch so genau zu liefern, wie sie beobachtet ist.

Gibt man indessen dem Quadrat des Bogenelements die Form

$$e^{2u}dt^2-e^{-2u}(dx^2+dy^2+dz^2),$$

die sich von der oben angegebenen nur in Gliedern zweiter Ordnung in u unterscheidet, so läßt sich zeigen, daß der Fehler des Gravitationsfeldes

[1]) Sitzungsberichte der preuß. Akad. 1918, S. 156.

von dritter Ordnung in u wird, so daß sich dann auch die Perihelbewegung des Merkur mit ausreichender Genauigkeit ergibt.

Um das zu zeigen, bilden wir zunächst den Tensor, dessen Komponenten Einstein[2]) mit $B_{\mu\nu}$ bezeichnet, wie er der Form

$$e^{2u}dt^2 - e^{-2u}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

entspricht. Werden die Variablen x, y, z, t mit $x^1 x^2 x^3 x^4$ und die partiellen Differentialquotienten von u nach x, y, z mit u_1, u_2, u_3 bezeichnet, so ergibt sich

$$B_{44} = -e^{4u}\Delta u, \quad B_{4\alpha} = 0, \quad B_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}\Delta u - 2u_\alpha u_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

wobei $\delta_{\alpha\beta}$ gleich 1 oder 0 zu setzen ist, je nachdem α gleich oder ungleich β ist. Wir fügen nun zu dem Quadrat des Bogenelements eine quadratische Form

$$a_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

hinzu. Die hinzutretenden Glieder werden nur die Komponenten $B_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ beeinflussen. Setzen wir nun $a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi}\int\frac{2u_\alpha u_\beta}{r}\,dx\,dy\,dz$, [3]) so werden sich die Komponenten $B_{\alpha\beta}$ bis auf Glieder höherer Ordnung um $2u_\alpha u_\beta$ ändern.

Für das Quadrat des Bogenelements

$$e^{2u}dt^2 - e^{-2u}(dx^2 + dy^2 + dz^2) + a_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta$$

wird demnach bis auf Glieder dritter Ordnung

$$B_{44} = -e^{4u}\Delta u, \quad B_{4\alpha} = 0, \quad B_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}\Delta u$$

oder, wie man auch sagen kann, die $a_{\alpha\beta}$ brauchten nur noch um Glieder dritter Ordnung verändert zu werden, um diese Werte der $B_{\alpha\beta}$ zu ergeben. Aus den $B_{\lambda\mu}$ erhalten wir die Komponenten des Energietensors durch die Gleichungen

$$8\pi K T_{\lambda\mu} = -\left(B_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}g_{\lambda\mu}B\right),$$

wo

$$B = g^{\lambda\mu}B_{\lambda\mu} = 2e^{2u}\Delta u,$$

d. h. alle Komponenten des Energietensors verschwinden mit Ausnahme von T_{44}, wofür sich ergibt:

$$4\pi K T_{44} = e^{4u}\Delta u \quad \text{oder} \quad 4\pi K T^{44} = \Delta u.$$

---

[2]) Annalen der Physik 49 (1916), S. 108.

[3]) r ist hier die Entfernung des Punktes, in dem die $a_{\alpha\beta}$ bestimmt werden sollen, von dem Element $dx\,dy\,dz$, wie bei der Einsteinschen Bestimmung der Gravitationspotentiale. Integriert wird über den ganzen Raum mit Ausschluß der Teile, wo u zu groß wird.

u wird also aus T^{44} durch das Integral

$$u = -K\int\frac{T^{44}}{r}\,dx\,dy\,dz$$

berechnet.

Es zeigt sich nun, daß der zu dem Quadrat des Bogenelements hinzugefügte Teil $a_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$ die Beschleunigung des Massenteilchens um Beträge ändert, die in u zwar nur von der zweiten Ordnung sind, aber außerdem noch das Quadrat der Geschwindigkeit des Massenteilchens als Faktor enthalten. Denn es ist

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = \begin{bmatrix}\mu\,\nu\\ \tau\end{bmatrix} g^{\alpha\tau}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}.$$

Durch das Hinzutreten von $a_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$ sind die $g_{\lambda\mu}$ um Größen zweiter Ordnung geändert, aber nur diejenigen unter ihnen, deren Indizes beide nicht größer als 3 sind. Dasselbe gilt von den $g^{\alpha\tau}$. Da Differentiationen nach x^4 nicht vorkommen, so sind daher nur diejenigen Größen $\begin{bmatrix}\mu\,\nu\\ \tau\end{bmatrix}$ geändert, bei denen alle drei Indizes nicht größer als 3 sind. α ist nicht größer als 3, da es sich um die Komponenten der Beschleunigung handelt. $g^{\alpha\tau}$ kann nur für $\tau \leqq 3$ von Null verschieden sein. $g^{\alpha\tau}$ wird daher um eine Größe zweiter Ordnung geändert sein. Die Änderung ist mit $\begin{bmatrix}\mu\,\nu\\ \tau\end{bmatrix}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}$ zu multiplizieren. Da aber $\begin{bmatrix}\mu\,\nu\\ \tau\end{bmatrix}$ von erster Ordnung in den u_α ist, so resultiert eine Änderung dritter Ordnung. Betrachtet man andererseits die Änderung von $\begin{bmatrix}\mu\,\nu\\ \tau\end{bmatrix}$. Sie ist von zweiter Ordnung in den u_α und mit $g^{\alpha\tau}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}$ zu multiplizieren. Hier aber sind μ und ν beide nicht größer als 3. Denn sonst bleibt $\begin{bmatrix}\mu\,\nu\\ \tau\end{bmatrix}$ ungeändert. Es resultiert daher eine Änderung, die in den u_α von zweiter Ordnung und dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist. Dies ist also eine Größe dritter Ordnung, wenn das Quadrat der Geschwindigkeit von erster Ordnung angenommen wird, wie es bei der Bewegung eines Planeten der Fall ist.

Die Perihelbewegung eines Planeten läßt sich in folgender Weise aus dem Bogenelement ableiten:

$$d\tau^2 = e^{2u}dt^2 - e^{-2u}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Man führe Polarkoordinaten r, φ, ϑ ein und beschränke sich auf die Meridianebene. Dann wird

$$\text{(I)}\qquad d\tau^2 = e^{2u}dt^2 - e^{-2u}(dr^2 + r^2d\varphi^2).$$

Das Verschwinden der Variation des Integrals

$$\int d\tau$$

liefert die beiden Gleichungen:

$$e^{2u}\frac{dt}{d\tau}=a, \qquad e^{-2u}r^2\frac{d\varphi}{d\tau}=c$$

oder

$$\frac{e^{4u}}{r^2}\frac{dt}{d\varphi}=\frac{a}{c}, \qquad \frac{d\tau}{d\varphi}=\frac{1}{c}r^2e^{-2u}.$$

Setzt man diese Werte von $\frac{dt}{d\varphi}$ und $\frac{d\tau}{d\varphi}$ in die Gleichung (I) ein, nachdem man sie durch $d\varphi^2$ dividiert hat, so ergibt sich

$$\frac{1}{c^2}r^4e^{-4u}=e^{-6u}r^4\frac{a^2}{c^2}-e^{-2u}\left(\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2\right)$$

oder

$$\frac{1}{c^2}e^{-2u}=e^{-4u}\frac{a^2}{c^2}-\left(\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right),$$

oder, wenn man für u seinen Wert $-\frac{KM}{r}$ einführt und daraus $\frac{du}{d\varphi}=\frac{KM}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$ ableitet:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=-u^2+\frac{K^2M^2}{c^2}\left[a^2e^{-4u}-e^{-2u}\right]=f(u).$$

Soll die Entfernung des Planeten sich zwischen zwei Grenzen bewegen, so muß $f(u)$ für zwei Werte u_1 und u_2 verschwinden. Man kann dann nach der bekannten Interpolationsformel

$$f(u)=\frac{f''(\bar{u})}{2}(u-u_1)(u-u_2)$$

setzen, wo $\bar{u}$ zwischen u_1 und u_2 liegt, wenn auch u demselben Intervall angehört. Da $f(u)$ für diese Werte von u positiv sein muß, so folgt, daß $f''(\bar{u})$ negativ ist. Es sei $u_1<u_2$ und u bewege sich von u_1 nach u_2 und wieder zurück nach u_1. Dann ist:

$$\pm\frac{du}{\sqrt{(u-u_1)(u_2-u)}}=\sqrt{-\frac{f''(\bar{u})}{2}}\,d\varphi=\sqrt{1-\frac{K^2M^2}{c^2}\left[8a^2e^{-4\bar{u}}-2e^{-2\bar{u}}\right]}\,d\varphi.$$

Auf der rechten Seite können wir, da u_1 und u_2 beide sehr kleine Zahlen sind, das zwischenliegende $\bar{u}$ gleich Null setzen, und da a^2 sehr nahe gleich 1 sein muß, so erhalten wir durch Integration über den Hin- und Hergang von u genähert:

$$2\pi=\int d\varphi\left(1-\frac{K^2M^2}{c^2}\,3\right).$$

D. h. die Perihelbewegung ist bei einem Umlauf gleich

$$\int d\varphi-2\pi=\frac{K^2M^2}{c^2}\,6\pi.$$

Statt der Konstanten c können wir den Mittelwert von u_1 und u_2 einführen. Entwickeln wir $f(u)$ nach Potenzen von u und vernachlässigen die Glieder dritter Ordnung, so ergibt sich für u_1 und u_2 die quadratische Gleichung

$$u^2 + \frac{K^2 M^2}{c^2}(4a^2 - 2)u + \frac{K^2 M^2}{c^2}(1 - a^2) = 0$$

und somit genähert $u_1 + u_2 = -\frac{K^2 M^2}{c^2} 2$ oder wenn r_m eine mittlere Entfernung des Planeten bezeichnet

$$-\frac{KM}{r_m} = -\frac{K^2 M^2}{c^2}$$

oder

$$\int d\varphi - 2\pi = \frac{KM}{r_m} 6\pi.$$

Aus der obigen Gleichung $\frac{e^{4w}}{r^2}\frac{dt}{d\varphi} = \frac{a}{c}$ folgt $\frac{r\,d\varphi}{dt} = \frac{e^{4w}}{a}\frac{c}{r}$. Für eine einigermaßen kreisförmige Bahn wird daher die mittlere Geschwindigkeit v genähert gleich

$$v = \frac{c}{r_m},$$

und da $\frac{1}{r_m} = \frac{KM}{c^2}$, so wird $v^2 = \frac{KM}{r_m}$ und somit

$$\int d\varphi - 2\pi = v^2 6\pi$$

eine Form für die Perihelbewegung, auf die schon Schwarzschild hingewiesen hat.

(Eingegangen am 10. 8. 1921.)

The solar gravitational field completely determined by its light rays.

Von

Edward Kasner in New York.

Introduction.

In a previous paper published in the *American Journal of Mathematics*[1]), I have taken up the question whether two fields both obeying Einstein's equations of gravitation can ever have the same light rays. I have answered this question in the negative; first, under the assumption that one of the fields is euclidean, and second, under the assumption that both fields are approximately euclidean. The simplification of the latter case is due to the fact that only the linear terms in the gravitational equations have to be taken into account in the calculation.

The solar field, that is, the field due to a single mass, taken say in the Schwarzschild form, is of course approximately euclidean and therefore, it follows that no essentially different form which is both approximately euclidean and obeys Einstein's equations can have the same light rays. In the present paper, I wish to settle this question completely for the solar field without assuming approximately euclidean character, that is, by taking into account the exact equations of gravitation $R_{ik} = 0$.

A field is represented by a quadratic differential form in four variables (x_1, x_2, x_3, x_4), the ten coefficients g_{ik} of which define the potential as a tensor. If we put this form equal to zero, we have the light equation of the field. The light rays, as Weyl[2]) has shown, are determined by this equation, that is, they depend only on the ratios of the ten coefficients. If then we take a form obeying Einstein's equations and multiply it by an arbitrary function, say $\nu(x_1 x_2 x_3 x_4)$, the new form

[1]) Einstein's theory of gravitation: determination of the field by light signals, Am. J. of Math. 43 (1921), pp. 20—28.

[2]) Raum, Zeit, Materie, 4. Auflage (1921), p. 115, and footnote p. 257.

will define a field having the same light rays, but the question is whether the new field can ever obey the gravitational equations. In the present paper we show that for the Schwarzschild form, no such factor exists (disregarding of course the trivial case where the multiplier is merely a constant).

It follows that if all the light properties in the solar field were obtained by observation, then the field itself (that is, the ten potentials) could be completely determined theoretically, assuming that Einstein's gravitational equations $R_{ik}=0$ were obeyed. Therefore, the planetary orbits could be computed theoretically from the light rays[3]).

(This result is comparable with Bertrand's deduction of the second and third laws of Kepler from the first law, in which of course the ordinary laws of dynamics are assumed to be valid and the field of force is assumed to be purely positional.)

In the Schwarzschild form, only the squares of the four differentials are present and this remains true when an arbitrary multiplier is introduced. We, therefore, begin by writing out the ten gravitational equations for the general orthogonal case, that is, the case where only the four squares are present. When the corresponding equations are written out for the new form involving the unknown multiplier ν, the results are fairly simple and we obtain ten partial differential equations of the second order in $N=\nu^{-\frac{1}{2}}$. Our main object is to show that this system of ten equations, for the particular case of the solar field, is inconsistent, that is to say, that there are no solutions other than constants.

The plan employed is to actually integrate the first six of the ten equations, namely, those corresponding to unlike subscripts $i\neq k$. The result contains four arbitrary functions each involving only one of the four independent variables. When this is substituted into the last four equations, namely, those corresponding to the case of like subscripts $i=k$, or rather into certain convenient combinations of these four equations, we obtain finally a sufficient number of relations between the derivatives of the four unknown functions, from which it follows that three of them must vanish and the other is merely a constant, and therefore, the unknown multiplier is itself merely a constant.

The general orthogonal formulas are next applied to the euclidean form. Here the unknown factor ν or the related function N is not simply

---

[3]) The converse question, determination of the field (and hence of the light rays) from the orbits (geodesics) alone, has been discussed by the author in Science **52** (1920), pp. 413—14. See also Science **53** (1921), p. 238, and American Journal of Mathematics **43** (1921), pp. 126—133, where it is proved that the solar field can be represented in a six-flat, but not in a five-flat.

a constant, since, in this case, the ten differential equations are found to actually admit a class of ∞^5 solutions. However, the forms obtained by introducing this factor are easily seen to have zero riemannian curvature and are therefore euclidean. This verifies the theorem proved in the earlier paper that the euclidean or the equivalent Minkowski form is completely determined by its light properties.

In the last section we state some new theorems relating to solutions of Einstein's general cosmological equations $R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = 0$ (light rays, five dimensions).

§ 1.

General formulas for the orthogonal form.

For the general quadratic form

$$(1) \qquad ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

the gravitational equations are (for empty space)

$$(2) \quad R_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} \mu\,\alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu\,\beta \\ \alpha \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \begin{Bmatrix} \mu\,\nu \\ \alpha \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu} \log \sqrt{-g} - \begin{Bmatrix} \mu\,\nu \\ \alpha \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \log \sqrt{-g} = 0.$$

Applying this to the case where only the square terms are present, which we describe as the *orthogonal form*, that is

$$(\mathrm{I}) \qquad ds^2 = \lambda_1\, dx_1^2 + \lambda_2\, dx_2^2 + \lambda_3\, dx_3^2 + \lambda_4\, dx_4^2$$

where the four functions λ_i are arbitrary functions of the world coordinates $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$, we find six equations of the form

$$(3') \qquad \begin{aligned} R_{12} = {} & L_{312} + L_{412} + L_{31} L_{32} + L_{41} L_{42} \\ & - L_{12}(L_{31} + L_{41}) - L_{21}(L_{32} + L_{42}) = 0 \end{aligned}$$

and four equations of the form

$$(3'') \qquad \begin{aligned} \frac{1}{\lambda_1} R_{11} = {} & \frac{1}{\lambda_1}\{L_{211} + L_{311} + L_{411} + L_{21}^2 + L_{31}^2 + L_{41}^2 - L_{11}(L_{21} + L_{31} + L_{41})\} \\ & + \frac{1}{\lambda_2}\{L_{122} + L_{12}(L_{12} - L_{22} + L_{32} + L_{42})\} \\ & + \frac{1}{\lambda_3}\{L_{133} + L_{13}(L_{13} + L_{23} - L_{33} + L_{43})\} \\ & + \frac{1}{\lambda_4}\{L_{144} + L_{14}(L_{14} + L_{24} + L_{34} - L_{44})\} = 0. \end{aligned}$$

Here we have introduced for abbreviation

$$(4) \qquad L_i = \frac{1}{2} \log \lambda_i$$

and, for the partial derivatives,

$$(4')\qquad \begin{aligned} L_{ik} &= L_{i,k} = \frac{\partial}{\partial x_k} L_i, \\ L_{ikj} &= L_{i,kj} = L_{i,jk} = \frac{\partial^2}{\partial x_k\, \partial x} L_i. \end{aligned}$$

The first subscript applied to L thus denotes the name of the function, while the second and third subscripts indicate partial differentiation. We may, therefore, interchange the second and third subscripts, but not the first and second.

Suppose now an arbitrary factor $\nu(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ is introduced into (I), giving a new orthogonal form

$$(\mathrm{I}^*)\qquad ds^{*2} = \lambda_1^* dx_1^2 + \lambda_2^* dx_2^2 + \lambda_3^* dx_3^2 + \lambda_4^* dx_4^2$$

where

$$\lambda_i^* = \nu \lambda_i;$$

then the tensor $R^*_{\mu\nu}$ is found by replacing L_i in (3′), (3″) by

$$(5)\qquad L_i^* = L_i - \log N$$

where, for convenience, we introduce

$$(5')\qquad N = \nu^{-\frac{1}{2}}.$$

Subtracting $R_{\mu\nu}$ from $R^*_{\mu\nu}$, we find that many of the terms cancel; and the final equations for the function N (which determines the multiplier ν) may be written as six equations of the form[4])

$$(6')\qquad D_{12} \equiv L_{12} N_1 + L_{21} N_2 - N_{12} = 0$$

and four equations of the form

$$(6'')\qquad \begin{aligned} D_{11} \equiv \frac{1}{\lambda_1}\{-3NN_{11} + 3N_1^2 - NN_1(-3L_{11} + L_{21} + L_{31} + L_{41})\} \\ + \frac{1}{\lambda_2}\{-NN_{22} + 3N_2^2 - NN_2(3L_{12} - L_{22} + L_{32} + L_{42})\} \\ + \frac{1}{\lambda_3}\{-NN_{33} + 3N_3^2 - NN_3(3L_{13} + L_{23} - L_{33} + L_{43})\} \\ + \frac{1}{\lambda_4}\{-NN_{44} + 3N_4^2 - NN_4(3L_{14} + L_{24} + L_{34} - L_{44})\} = 0. \end{aligned}$$

We shall find it convenient to employ the differences between the latter equations, which simplify considerably, in fact become linear in N, for example,

---

[4]) These may be regarded as special cases of Levi-Civita's general formulas for the conformal transformation of arbitrary riemannian manifolds of n dimensions. See Nota III of his elegant series on „ds^2 einsteiniani in campi newtoniani", Rend. Acc. d. Lincei (1918), p. 187. The same remark applies to the formulas for the Euclidean case in § 2 of the writer's article in Amer. Journ. of Math. 43, p. 23.

$$(6''') \qquad \begin{aligned} D_{11} - D_{22} &= \frac{-N_{11} + N_1(L_{11} + L_{21})}{\lambda_1} + \frac{N_{22} - N_1(L_{12} + L_{22})}{\lambda_2} \\ &+ \frac{N_1(L_{32} - L_{31})}{\lambda_3} + \frac{N_1(L_{42} - L_{41})}{\lambda_4} = 0. \end{aligned}$$

In all these equations we note that there is only *one* function N so that all subscripts attached to N denote partial differentiation and are therefore permutable; while there are *four* distinct functions L_i so that only the subscripts after the first are permutable. Our partial differential equations are of the second order in N and of the first order in the L_i. The λ_i are merely the related functions

$$(7) \qquad \lambda_i = e^{2L_i}.$$

The analytical problem is: given four functions L_i obeying the ten equations (3′), (3″), does there exist a non-constant function N obeying the ten equations (6′), (6″), and therefore also the equations (6‴)? We shall now settle the question (in the negative) for the solar field.

§ 2.

The solar field.

The Schwarzschild[6]) form for the central-symmetric field is

$$(8) \qquad ds^2 = \left(1 - \frac{\varkappa}{r}\right) dt^2 - r^2 d\Theta^2 - r^2 \sin^2\Theta\, d\varphi^2 - \frac{r}{r-\varkappa} dr^2$$

where $\varkappa = 2m$, m being the central mass. Comparing this with our orthogonal form (I), taking

$$x_1 = r, \quad x_2 = \Theta, \quad x_3 = \varphi, \quad x_4 = t$$

and changing the sign of ds^2 for convenience, we have

$$(9) \qquad \lambda_1 = \frac{x_1}{x_1 - \varkappa}, \quad \lambda_2 = x_1^2, \quad \lambda_3 = x_1^2 \sin^2 x_2, \quad \lambda_4 = \frac{\varkappa - x_1}{x_1}.$$

Therefore, taking half of the logarithms,

$$(10) \qquad \begin{aligned} L_1 &= -\frac{1}{2}\log\frac{x_1 - \varkappa}{x_1}, & L_2 &= \log x_1, \\ L_3 &= \log x_1 + \log\sin x_2, & L_4 &= \frac{1}{2}\log\frac{\varkappa - x_1}{x_1}. \end{aligned}$$

All the partial derivatives of first order of these functions vanish except the following five:

[6]) Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes, Sitzungsber. Akad. Berlin (1916), p. 189; or the simpler derivation in Hilbert, Grundlagen der Physik II, Göttinger Nachrichten (1917), p. 70.

$$
(11)\qquad \begin{aligned} L_{21} &= L_{31} = \frac{1}{x_1}, \qquad L_{32} = \cot x_1, \\ L_{41} &= -L_{11} = \frac{\varkappa}{x_1^2 - \varkappa x_1}. \end{aligned}
$$

The ten equations (3′), (3″) are of course obeyed by these functions L, as is readily verified.

The first six of the ten equations for N, namely type (6′), now become on introducing the values (11)

$$
(12)\qquad \begin{aligned} N_{21} &= \frac{1}{x_1} N_2, & N_{23} &= \cot x_2 \cdot N_3, \\ N_{13} &= \frac{1}{x_1} N_3, & N_{24} &= 0, \\ N_{14} &= \frac{\varkappa}{2\,(x_1^2 - \varkappa x_1)} N_4, & N_{34} &= 0. \end{aligned}
$$

Here we have six linear partial differential equations of the second order for our one unknown function N. There is no difficulty in integrating them successively, so we shall omit the details and merely state the result that the most general integral of the system is[6])

$$
(13)\qquad N = X_1 + X_2 x_1 + X_3 x_1 \sin x_2 + X_4 \left(\frac{x_1 - \varkappa}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}
$$

where X_i denotes an arbitrary function of the single variable x_i. The result thus involves four arbitrary functions, each of one argument.

It remains now to substitute (13) into the four equations of type (6″); but as remarked above it will suffice to use the three independent equations of type (6‴). These have the advantage of being linear in N.

We begin with $D_{11} - D_{44} = 0$. Using the formulas (9), (10), (11), we find that this reduces to

$$
\frac{N_{44}}{\lambda_4} - \frac{N_{11}}{\lambda_1} = 0.
$$

This, by introducing (13), becomes

$$
(14)\qquad X_1'' + X_4 \frac{d^2}{d x_1^2}\left[\left(\frac{x_1 - \varkappa}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + X_4'' \left(\frac{x_1 - \varkappa}{x_1}\right)^{-\frac{3}{2}} = 0
$$

where accents denote ordinary derivatives with respect to the one variable involved. Differentiating with respect to x_4 we find that the unknown

[6]) It is rather remarkable that this may be rewritten in the equivalent form

$$
(13')\qquad \sum X_i \sqrt{\lambda_i}
$$

where the λ_i are the coefficients (9) of the solar field. This symmetric form turns out to be valid also for the fields discussed later in § 3 and for those Einstein fields which depend on one variable, but it is, in all probability not valid for all possible Einstein fields.

function X_4 must be a constant. The last term of (13) is thus a function of x_1 alone and therefore may be absorbed in the first term X_1. We may, therefore, assume $X_4 = 0$. Then, from (14), $X_1'' = 0$; that is, $X_1 = b\,x_1 + c$. The part $b\,x_1$ may however be absorbed in the second term of (13). That is, we may take $X_1 = c$. Hence (14) shows that (13) must be of the form

$$N = c + X_2\,x_1 + X_3\,x_1 \sin x_2 . \tag{15}$$

Here $X_1 = c$, $X_4 = 0$, and X_2 and X_3 are functions still to be determined.

We next use the condition $D_{33} - D_{22} = 0$, found from $(6''')$ by interchanging the subcripts 1 and 3. This becomes

$$\frac{N_{33}}{\lambda_3} + \frac{-N_{22} - N_2 \cot x_2}{\lambda_2} = 0 .$$

Substituting (15), we find

$$X_3'' + X_3 - X_2'' \sin x_2 + X_2' \cos x_2 = 0.$$

Since the first two terms involve x_3 alone, and the last two involve x_2 alone, we must have

$$\begin{aligned} X_3'' + X_3 &= a, \\ X_2'' \sin x_2 - X_2' \cos x_2 &= a \end{aligned}$$

where a is a constant. Integrating and substituting into (15), we find the following necessary form

$$N = c + x_1\,[a_4 + a_3 \cos x_2 + \sin x_2\,(a_1 \sin x_3 + a_2 \cos x_3)] \tag{16}$$

involving five constants c, a_1, a_2, a_3, a_4. Here

$$\begin{aligned} X_1 = c, &\quad X_2 = a_3 \cos x_2 + a_4 , \\ X_3 = a_1 \sin x_3 + a_2 \cos x_3 , &\quad X_4 = 0. \end{aligned} \tag{16'}$$

To determine these constants we use the final condition $D_{11} - D_{22} = 0$, that is $(6''')$. This by (10) and (11) becomes

$$\frac{N_{11} + \dfrac{x_1 - 2\varkappa}{x_1^2 - \varkappa x_1} N_1}{\lambda_1} - \frac{N_{22}}{\lambda_2} = 0 .$$

Substituting the form (15), this gives

$$\frac{x_1^2 - 2\varkappa}{x_1} (X_2 + X_3 \sin x_2) - X_2'' + X_3 \sin x_2 = 0 .$$

Since the first factor is a non-constant function of x_1 alone, this decomposes into two equations

$$\begin{aligned} X_2 + X_3 \sin x_2 &= 0 , \\ X_2'' - X_3 \sin x_2 &= 0 . \end{aligned}$$

Substituting the previously found forms (16′), we find

$$a_1 \sin x_3 + a_2 \cos x_3 + a_3 \cot x_2 + a_4 \cos x_2 = 0.$$

Since this to be an identity in x_2 and x_3, it follows that the four constants a_1, a_2, a_3, a_4 must all vanish. Hence from (16) we have

$$N = c, \tag{17}$$

that is, the multiplier ν is merely a constant, which was to be proved.

§ 3.
The Euclidean or Minkowski field.

We now apply the general formulas to the Minkowski form [7])

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{18}$$

or the equivalent euclidean form

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2. \tag{19}$$

Here $\lambda_i = 1$, so that $L_i = 0$. The set of equations (6′) gives

$$N_{ik} = 0 \qquad (i \neq k). \tag{20′}$$

Equations (6‴) give

$$N_{11} = N_{22} = N_{33} = N_{44}. \tag{20‴}$$

Finally from any one of the four equations (6″) we find

$$N(N_{11} + N_{22} + N_{33} + N_{44}) = 2(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + N_4^2). \tag{20″}$$

From (20′) we see that N must be the sum of four functions, each involving only one of the variables, say

$$N = X_1 + X_2 + X_3 + X_4.$$

Then from (20‴) we find

$$X_i = a x_i^2 + a_i x_i + \text{constant},$$

that is,

$$N = a \sum x_i^2 + \sum a_i x_i + a_5 \tag{21}$$

containing six constants $a, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$.

This is found to satisfy (20″) if we impose the one condition

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 4 a a_5 = 0. \tag{21′}$$

---

[7]) This form is termed pseudo-euclidean by Hilbert („Grundlagen der Physik“, Göttinger Nachrichten 1915, 1917). Eddington uses both semi-euclidean and hyperbolic, — the latter term, however, should not be used since there is no connection with Lobatchevsky space. The form is flat (zero riemann curvature) and is included under euclidean manifolds by Einstein.

The general solution of our system thus involves five independent constants.

Since $\nu = N^{-2}$, the forms having the same light rays as the given euclidean form (19) are

$$\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2}{N^2} \tag{22}$$

where N is defined by (21) and (21′). These are easily seen to be euclidean being merely the result of applying a transformation of coordinates (selected from the conformal or inversion group in four-space) to (19) [*]).

§ 4.

The cosmological equations.

In Einstein's more recent cosmological discussions, the gravitational equations $R_{ik} = 0$ (or the equivalent system $R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = 0$, where R is the scalar curvature $g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$) are replaced by the more general equations

$$R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = 0. \tag{27}$$

The advantage of this form, with the peculiar factor $\frac{1}{4}$, is due to the fact that the scalar of the left member vanishes identically. Set (27) is satisfied not only by flat manifolds but also by all spherical manifolds (constant riemannian curvature).

For this general form we state the following results for comparison with our previous results for the special case $R_{ik} = 0$.

I. If the manifold is to admit conformal representation on euclidean space (that is, has the same light rays) it must be of constant riemannian curvature.

II. If the manifold is to be imbedded in a five-flat then either it is a *hypersphere* (the four principal curvatures $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$ at any point being equal so that all points are umbilical); or else at every point

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = -\varkappa_3 = -\varkappa_4$$

---

[*]) See American Journal of Mathematics 43, pp. 23, 24 where it is shown directly that the curvature tensor $R_{ij,kl}$ vanishes. (This may also be proved from Levi-Civita's general formulas.) The letter N of the present paper is there taken as M, and the equation corresponding to (20″) is not printed, but is used in the integration, giving condition (21′). The equation $N = 0$ thus represents a null-hypersphere in the four-flat $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$. [Added in proof: A simple derivation of this theorem for n dimensions is given in a note by J. A. Schouten and D. J. Struik to be published in Amer. Journ. of Math. The result is stated by Ogura, Comptes Rendus, Nov. 17, 1921, apparently without knowledge of my earlier papers.]

so that we have a certain possible type of what may be termed *hyperminimal* solutions.

[Added in proof: See my papers on "Einstein's cosmological equations" in Science 54 (Sepl 30, 1921), p. 304 and Amer. Journ. of Math. 44 (Oct. 1921), where also all solutions depending on one variable, and a simple algebraic solution (namely a quartic variety constructed in a linear space of six dimensions) are given. In Nature 108 (Dec. 1, 1921), p. 434, I have called attention to a curious property of the motion of a partiale starting with the velocity of light.]

Columbia University, New York, July, 1921.

(Eingegangen am 9. 9. 1921.)

Sur le théorème limite du calcul des probabilités.

Von

Serge Bernstein in Charkow.

Je résume dans ces quelques pages, en omettant des démonstrations, mon étude (qui date de l'année 1917—1918) sur le théorème limite du calcul des probabilités ou sur les conditions de l'applicabilité de la loi de Gauss. Le problème consiste dans la recherche des conditions pour que, S_n désignant une quantité dépendant de n dont l'espérance mathématique est nulle, la probabilité de l'inégalité

$$t_0\sqrt{2B_n} < S_n < t_1\sqrt{2B_n},$$

où $B_n = \text{Esp. Math. } (S_n^2)$, ait pour limite, lorsque n croît indéfiniment,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{t_0}^{t_1} e^{-t^2}\,dt.$$

Sans restreindre la généralité on peut poser $S_n = u_1^{(n)} + u_2^{(n)} + \ldots + u_n^{(n)}$. Dans la suite pour abréger l'écriture j'omettrai l'indice supérieur dans le terme $u_k^{(n)}$, en écrivant simplement u_k; mais pour que les énoncés des propositions qui suivent ne soulèvent pas de malentendus et soient compris dans toute leur généralité il faut bien se rappeler que nous n'admettons pas, en général, l'existence de la relation $S_n - S_{n-1} = u_n$.

Il est facile d'abord de démontrer la condition nécessaire suivante pour l'applicabilité du théorème limite du calcul des probabilités que je présenterai sous une forme particulière pour faciliter sa comparaison avec la condition suffisante que je donnerai plus loin.

Le théorème limite n'est certainement pas applicable, si B_n étant de l'ordre n^λ, il existe parmi les nombres u_i au moins un, tel que s'il reçoit une certaine valeur u_i^0 (dont la probabilité est finie), les espérances mathématiques des produits $u_k u_l$, où $k-i$ et $l-i$ sont tous les deux inférieurs

à $n^{\frac{\lambda}{2}}$, *reçoivent des accroissements supérieurs à un nombre positif fini* α, *les accroissements des espérances mathématiques des autres produits étant non négatifs.*

Pour arriver aux conditions suffisantes je fais usage d'un lemme préliminaire qui joue un rôle fondamental dans ma méthode de démonstration.

Lemme fondamental. *Si quel que soit l'ensemble de valeurs connues de* $u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}$, *à l'exception d'un ensemble dont la probabilité est* ε_i, *les écarts que reçoivent les espérances mathématiques de* u_i *et* u_i^2, *respectivement, ne dépassent pas* α_i *et* β_i, *si de plus l'espérance mathématique de* $|u_i|^3$ *reste inférieure à* c_i, *le théorème limite est applicable à la somme* S_n, *pourvu que* $\frac{\sum_1^n \alpha_i}{\sqrt{B_n}}$, $\frac{\sum_1^n \beta_i}{\sqrt{B_n}}$, $\frac{\sum_1^n c_i}{\sqrt{B_n^3}}$, $\sum_1^n \varepsilon_i$ *tendent vers* 0 *avec* $\frac{1}{n}$.

Si les quantités u_i satisfont aux conditions du lemme, nous dirons, pour abréger, que les quantités u_i sont *presque indépendantes.* Ceci posé, si l'on a une somme quelconque $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, on pourra toujours affirmer l'applicabilité à cette somme du théorème limite, si l'on parvient à rassembler les termes de cette somme en $2\,l$ groupes: $y_1 + x_1 + y_2 + x_2 \ldots + y_l + x_l$ de telle sorte que $y_1, y_2, \ldots, y_l$ soient presque indépendantes, tandis qu'en même temps l'ordre de croissance de Esp. Math. $(x_1 + x_2 + \ldots + x_l)^2$ soit inférieur à celui de $B_n =$ Esp. Math. $(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)^2$. En effet il est facile de montrer alors que

$$\frac{\text{E. M.}\,(y_1 + y_2 + \ldots + y_l)^2}{\text{E. M.}\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)^2} \to 1$$

et d'en conclure que le théorème limite étant applicable à la somme $y_1 + y_2 + \ldots + y_l$, doit s'appliquer également à la somme S_n. On obtient ainsi des théorèmes généraux plus ou moins semblables dont les énoncés peuvent être variés selon les besoins pratiques. Je me bornerai au suivant:

Théorème. *Si* $B_{i,\,i+h} = \text{E. M.}\,(u_{i+1} + u_{i+2} + \ldots + u_{i+h})^2$ *est de l'ordre* h^λ $(\lambda \geqq 1)$, *si* E. M. $|u_k|^3$ *reste bornée quelles que soient les valeurs connues des autres* u_i, *et si, en outre, un certain nombre des* u_i *étant connues,* E. M. (u_k) *et* E. M. $(u_k u_l)$ *reçoivent des écarts inférieurs à* $\frac{1}{n}$, *tant que* $|k - i| > n^\varrho$ *où* $\varrho < \frac{\lambda}{2}$, *le théorème limite est applicable à la somme* $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

En comparant ce théorème à la condition nécessaire indiquée plus haut, on voit qu'il tomberait en défaut, si l'on y faisait $\varrho = \frac{\lambda}{2}$.

Je résumerai brièvement la démonstration. On pose

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 + u_2 + \ldots + u_h \\ y_2 &= u_{h+k+1} + \ldots + u_{2h+k} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_l &= u_{(l-1)(h+k)+1} + \ldots + u_{l(h+k)-k}, \end{aligned}$$

où k est le plus grand nombre entier satisfaisant à la condition $k < n^{\varrho}$, de plus $l = n^{\delta}$, où δ satisfait à l'inégalité $\delta < \lambda - 2\varrho$, et, enfin, h est le plus petit entier satisfaisant à la condition $h \geqq n^{1-\delta} - k$. Dans ces conditions

$$\frac{\text{E. M.}\,(y_1 + y_2 + \ldots + y_l)^2}{B_{0,n}} \to 1,$$

et par conséquent il suffit de prouver que les quantités y_i sont presque indépendantes. A cet effet, il suffit d'observer d'abord, que l'écart maximum de $\text{E. M.}\,(y_i)$ et celui de $\text{E. M.}\,(y_i^2)$ sont respectivement inférieurs à $\frac{h}{n}$ et $\frac{h^2}{n}$, lorsque les y_i précédentes sont connus; mais la condition relative à $\text{E. M.}\,|y_i|^3$ est un peu plus difficile à mettre en évidence. On y arrive par le raisonnement suivant où, pour fixer les idées, je supposerai $\lambda = 1$: admettons que pour une certaine valeur n_0 on ait, quel que soit g, une inégalité de la forme

$$\text{E. M.}\,|u_{g+1} + \ldots + u_{g+n_0}|^3 < A n_0^{1+\frac{\delta}{2}} n^{\varrho};$$

dans ces conditions, on aura certainement, en désignant par t un nombre fixe indépendant de n_0,

$$\text{E. M.}\,|u_{g+1} + \ldots + u_{g+2n_0}|^3 < 2A n_0^{1+\frac{\delta}{2}} n^{\varrho} + t n_0^{\frac{1}{2}} n^{\varrho} < A(2n_0)^{1+\frac{\delta}{2}} n^{\varrho};$$

pourvu que A soit un nombre fixe supérieur à $\dfrac{t}{2(2^{\frac{\delta}{2}}-1)}$ Il en résulte immédiatement que

$$\text{E. M.}\,|y_i|^3 < A(2h)^{1+\frac{\delta}{2}} n^{\varrho}, \text{ d'où } \frac{\Sigma\,\text{E. M.}\,|y_i|^3}{n^{3/2}} \to 0,$$

et le théorème est ainsi démontré.

Comme première illustration de ce théorème, j'indiquerai l'exemple suivant. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_N$ un grand nombre de quantités indépendantes, dont les espérances mathématiques sont nulles et dont les carrés admettent les mêmes espérances mathématiques. On définit ensuite $n = N - t + 1$ quantités $u_1, u_2, \ldots, u_n$ par la condition que u_i reçoit la valeur $+1$ ou -1, suivant que la somme $x_i + x_{i+1} + \ldots + x_{i+t-1}$ est positive où negative, et la valeur 0, lorsque cette somme est nulle. On trouve alors

comme conséquence du théorème démontré et par un calcul qu'il est inutile de reproduire que la probabilité de l'inégalité

$$z_0\sqrt{nt\left(2-\frac{4}{\pi}\right)} < u_1 + \ldots + u_n < z_1\sqrt{nt\left(2-\frac{4}{\pi}\right)}$$

a pour limite $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{z_0}^{z_1} e^{-t^2}dt$, pourvu que $t = n^\varrho$ avec $\varrho < 1$.

Comme seconde application, je me propose de généraliser les résultats de M. A. Markoff relatifs aux séries d'événements formant une chaîne simple.

Supposons que l'on ait une série d'événements dont les probabilités a priori sont égales à $p_1, p_2, \ldots, p_n$, on admet qu'après l'apparition où la non apparition de l'événement d'ordre k, la probabilité de l'événement d'ordre $\overline{k+1}$ devienne égale respectivement à p'_{k+1}, p''_{k+1}, quels que soient les événements antérieurs réalisés. M. A. Markoff[1]) a montré que le théorème limite des probabilités est applicable à la somme $(m - p_1 - p_2 - \ldots - p_n)$, où m désigne le nombre d'événements apparus, dans le cas où il existe un nombre fixe positif α, tel que $p'_k q'_k > \alpha$, $p''_k q''_k > \alpha$, où $q'_k = 1 - p_k$, $q''_k = 1 - p''_k$. Le théorème indiqué plus haut permet d'étendre la condition suffisante de l'éminent géomètre russe: *Il suffit que l'on ait*

$$|p'_k - p''_k| < 1 - \frac{1}{k^\alpha} \quad \textit{avec} \quad \alpha < \frac{1}{2},$$

si en même temps sur trois expressions successives, $p_{k+1}q_{k+1} - \delta^2_{k+1}p_k q_k$, *où* $\delta_k = p'_k - p''_k$ *et* $q_k = 1 - p_k$, *deux au moins ne tendent pas simultanément vers* 0. Ainsi, par exemple, le théorème limite ne cesse pas d'être vrai si, pour toute valeur de k, $p'_k = 0$, pourvu que $p''_k q''_k$ ne tende pas vers 0. Signalons aussi que l'hypothèse que $\delta_k > 0$ permettrait de remplacer la condition restrictive relative à l'expression $p_{k+1}q_{k+1} - \delta^2_{k+1}p_k q_k$ par la condition suivante plus générale: sur les produits successifs $p_k q_k$ l'un au moins doit rester supérieur à un nombre fixe a. En modifiant un peu l'énoncé de notre théorème, on peut donner une autre forme à la condition suffisante. *Il suffit que* $p_k q'_k > \frac{1}{k^\alpha}$, $p''_k q''_k > \frac{1}{k^\alpha}$ *et que* $\delta_k > 1 - \frac{1}{k^{\alpha_1}}$ *où* $\alpha_1 > \frac{7\alpha - 1}{6}$. Il est clair que la condition relative à δ_k est remplie d'elle-même dans le cas où $\alpha < \frac{1}{7}$. Mais il est interessant de noter que notre condition suffisante contient également des cas où α est aussi voisin de 1 qu'on le veut. (J'ai démontré ailleurs que pour $\alpha \geq 1$ non seulement le

[1]) Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg 25 (1910), Nr. 3.

théorème limite, mais la loi des grands nombres[2]) elle-même tombe en défaut.) Remarquons que nos conditions suffisantes se distinguent de celles de M. A. Markoff par le fait qu'elles comprennent des cas où la *dispersion* est soit *infiniment grande*, soit *infiniment petite*. Je terminerai cet article par l'énoncé d'un théorème qui doit servir de base mathématique à la théorie de la corrélation normale et dont la démonstration est fondée sur la méthode exposée plus haut:

Théorème. *Soient*

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad S'_n = u'_1 + u'_2 + \ldots + u_n$$

deux sommes d'éléments dépendants tels que

$$\text{E.M.}(u_{i+1} + u_{i+2} + \ldots + u_{i+h})^2 = B_{i,h}, \quad \text{E.M.}(u'_{i+1} + \ldots + u'_{i+h})^2 = B'_{i,h}$$

sont de l'ordre h; si $\text{E.M.}|u_i|^3$ *ainsi que* $\text{E.M.}|u'_i|^3$ *restent bornés quelles que soient les valeurs reçues par les autres u et u'_i, si, de plus, les écarts de* $\text{E.M.}(u_k)$, $\text{E.M.}(u'_k)$, $\text{E.M.}(u_k u_l)$, $\text{E.M.}(u_k u'_l)$, $\text{E.M.}(u'_k u'_l)$ *restent inférieurs à $\frac{1}{n}$, tant qu'on ne connaît aucun des u_i ou u'_i pour lesquels* $|k-i| < n^\varrho$, $|l-i| < n^\varrho$, *où* $\varrho < \frac{1}{2}$, *la probabilité de l'existence simultanée des inégalités*

$$t_0\sqrt{2B_{0,n}} < S_n < t_1\sqrt{2B_{0,n}}, \quad t'_0\sqrt{2B'_{0,n}} < S'_n < t'_1\sqrt{2B'_{0\,n}}$$

a pour limite, lorsque n croît indéfiniment,

$$\frac{1}{\pi\sqrt{1-k^2}}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t'_0}^{t'_1} e^{-\frac{t^2+t'^2-2ktt'}{1-k^2}}\,dt\,dt'$$

où

$$k = \frac{\text{E.M.}(S_n S'_n)}{\sqrt{B_{0,n}B'_{0,n}}} \mp 1.$$

---

[2]) Dans des cas exceptionels la loi des grands nombres peut s'appliquer au cas où $\alpha = 1$.

(Eingegangen am 2. 8. 1921.)

Zur mathematischen Grundlegung der kinetischen Gastheorie.

Von

Paul Bernays in Göttingen.

Einleitung.

Unter den verschiedenerlei Annahmen, auf welche die Überlegungen der kinetischen Gastheorie sich stützen, befinden sich insbesondere auch solche, die nicht den Charakter physikalischer Hypothesen besitzen, sondern den von *Vermutungen*, welche die Gültigkeit gewisser *rein mathematischer Wahrscheinlichkeits-Theoreme* betreffen, auf deren Beweis man nur der Schwierigkeit halber vorläufig verzichtet.

Dieses Auftreten mathematischer Vermutungen in den Grundlagen der kinetischen Gastheorie hat Hilbert in seiner (im Herbst 1919 gehaltenen) Vorlesung über „Natur und mathematisches Erkennen" besonders nachdrücklich hervorgehoben. Zur Erläuterung führte er folgendes Beispiel an:

Es sei ein Kasten durch eine innere Wand in zwei gleich große Fächer A und B geteilt. In dem Fach A befinde sich ein Gas, das Fach B sei evakuiert. Wird nun die trennende Wand weggenommen, so verteilt sich das Gas über das ganze Innere des Kastens, d. h. nach Ablauf einer gewissen Zeit sind beide Fächer mit gleicher Dichte von dem Gase erfüllt. Um diese Erfahrungstatsache vom Standpunkt der kinetischen Gastheorie zu erklären, denkt man sich zunächst das Gas als bestehend aus einer großen Zahl (n) von gleichbeschaffenen Molekülen, elastischen Kugeln, deren Bewegung sich nach den Gesetzen der Mechanik vollzieht, und zwar so, daß auf freier Bahn die Bewegung geradlinig gleichförmig ist, beim Zusammentreffen zweier Moleküle die Gesetze des elastischen Stoßes zur Geltung kommen und an den Wänden Reflektion stattfindet. Und nun käme es darauf an, zu beweisen, daß zu einem beliebig gewählten Zeitpunkt der Beobachtung, sofern dieser nur von der Anfangszeit (dem Zeitpunkt der Beseitigung der trennenden Wand) einen gewissen Mindest-Abstand besitzt, *fast immer*, d. h. bei der ganz überwiegenden Mehrheit der Anfangs-

bedingungen, *nahezu gleich viele* Moleküle in A wie in B vorhanden sind, wobei das Maß der „überwiegenden Mehrheit" sowie die Bedeutung von „nahezu gleich viele" genauer durch Ungleichungen zu präzisieren ist.

Dieser Nachweis wäre eine rein mathematische Angelegenheit. Es ist aber keine Rede davon, daß er geführt ist; vielmehr nimmt man die Richtigkeit der Behauptung bloß auf ihre Plausibilität hin an.

Die hier vorliegende Vermutung bildet einen Sonderfall einer viel allgemeineren Annahme, nämlich derjenigen auf welcher die Gleichsetzung der „Zeitgesamtheit" mit der „natürlichen virtuellen Gesamtheit" beruht[1]). Ein anderes Beispiel für einen mathematischen Satz, den man unbewiesen der Gastheorie zugrunde legt, bildet die sogenannte *Ergodenhypothese*[2]), deren Beweis bisher auch nicht gelungen ist.

Für das zuerst genannte Theorem (betreffend den zweigeteilten Kasten) hat Hilbert auf eine Art der schematischen Vereinfachung hingewiesen, welche die Ausführung des mathematischen Beweises ermöglicht[3]). Diese besteht darin, daß man die Moleküle als punktförmig annimmt und sich auf eine Raum-Dimension beschränkt.

Im Eindimensionalen erhalten die Stoßgesetze eine besonders einfache Form; sie besagen dann nämlich, daß beim Zusammenstoß zweier Moleküle diese ihre Geschwindigkeiten vertauschen. Hieraus folgt unter der Annahme punktförmiger Moleküle, daß die Zusammenstöße für die statistischen Überlegungen überhaupt nicht berücksichtigt zu werden brauchen, daß also der Vorgang so betrachtet werden kann, als ob die Massenpunkte ungehindert aneinander vorbeigehen.

Wir gelangen somit zu folgendem Schema: Auf einer Strecke, welche in die zwei Hälften („linke" und „rechte" Hälfte) geteilt ist, bewegen sich n Massenpunkte von gleicher Masse unabhängig voneinander, geradlinig gleichförmig im Innern, und an den Enden kehren sie die Richtung ihrer Bewegung um. Zur Anfangszeit befinden sich alle Massenpunkte in der linken Hälfte der Strecke.

Behauptet wird, daß nach Ablauf einer gewissen Mindestzeit ungefähr ebenso viele Massenpunkte sich in der linken wie in der rechten Streckenhälfte befinden, daß also das Verhältnis der Anzahl der Massenpunkte in der linken

[1]) Vgl. z. B. in dem Artikel von P. Hertz über statistische Mechanik (Weber und Gans, Repetitorium der Physik) Nr. 242, S. 455; Nr. 247, S. 470 und Nr. 304, S. 599.

[2]) Da die ursprüngliche Formulierung der Ergodenhypothese mit einer Ungenauigkeit behaftet war, so wird die Annahme in ihrer genaueren Fassung zuweilen als „Quasi-Ergodenhypothese" bezeichnet.

[3]) Im gleichen Sinne hat Weyl die Ergodenhypothese gestützt, indem er für einen schematisch vereinfachten Spezialfall ihren Beweis erbrachte („Sur une application de la théorie des nombres à la mécanique statistique et à la théorie des perturbations", L'Enseignement mathématique, November 1914).

Hälfte zur Gesamtzahl nahezu gleich $\frac{1}{2}$ ist, sofern nur gewisse Anfangszustände ausgeschlossen werden, welche in der Gesamtheit aller möglichen Anfangszustände nur einen verschwindend kleinen Bruchteil ausmachen.

Zur Präzisierung der Aussage bedarf es noch einer Voraussetzung über die Gleichmöglichkeit von Anfangszuständen.

Entsprechend der Annahme, daß die Massenpunkte sich geradlinig gleichförmig bewegen, haben wir uns zu denken, daß die Gesamt-Energie kinetische Energie ist, also, abgesehen von dem Massenfaktor, bestimmt wird durch die Summe der Quadrate der Anfangsgeschwindigkeiten:

$$v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2.$$

Diese Größe denken wir uns als fest gegeben $= n \cdot C^2$, desgleichen auch die Anfangslagen der Massenpunkte.

Die einfachste Annahme betreffs der Gleichwertigkeit von Anfangszuständen ist dann, daß alle Punkte der „Geschwindigkeits-Kugel“

$$v_1^2 + \ldots + v_n^2 = nC^2$$

gleichberechtigt sind.

Unter diesen Voraussetzungen soll nunmehr der Beweis der aufgestellten Behauptung durchgeführt werden; und zwar wird das zahlenmäßige Ergebnis folgendermaßen lauten:

Es bedeute l die Länge der Strecke, t die „Wartezeit“ vom Anfangszustand bis zur Beobachtung, und zugleich auch den Zeitpunkt der Beobachtung; n_1 sei die Anzahl der Massenpunkte, welche zur Zeit t in der linken Hälfte der Strecke liegen. Die dimensionslose Größe $\frac{C \cdot t}{l}$ werde zur Abkürzung mit a bezeichnet.

q bedeute einen echten Bruch und $W_q(t)$ die Wahrscheinlichkeit, daß zur Zeit t die Abweichung von der Gleichverteilung der Massenpunkte auf die Streckenhälften, welche durch den Ausdruck $\left|\frac{n_1}{n} - \frac{1}{2}\right|$ dargestellt wird, mindestens q beträgt.

Dann ist für $q \leq \frac{1}{8}$

$$W_q(t) < \frac{12}{q \cdot \sqrt{n}} \cdot e^{-n\left(2q^2 - \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\right)}. \tag{1}$$

Hieraus folgt, daß für $\frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \leq q^2$, d. h. für $t \geq \frac{l}{\sqrt{2\pi} \cdot C \cdot q^2}$

$$W_q(t) < \frac{12}{q\sqrt{n}} \cdot e^{-nq^2}$$

ist.

Nehmen wir $l = 20$ cm an und setzen für C den Wert der mittleren Ge-

schwindigkeit der Moleküle in Luft von gewöhnlicher Temperatur: $5 \cdot 10^4$ cm/sek, so ist die Bedingung

$$t \geqq \frac{l}{\sqrt{2\pi} \cdot C \cdot q^2}$$

für $q = \frac{1}{100}$ erfüllt bei einer Wartezeit von mindestens 2 Sekunden

„ $q = \frac{1}{1000}$ „ „ „ „ „ „ 3 Minuten

„ $q = \frac{1}{10000}$ „ „ „ „ „ „ $4\frac{1}{2}$ Stunden.

Wählen wir ferner als Größenordnung für n die ungefähre Zahl der Moleküle in 20 ccm Luft (bei 0° Celsius und Atmosphärendruck), also $20 \cdot 27 \cdot 10^{18}$, so erhalten wir unter der für die Wartezeit t angegebenen Bedingung die Abschätzungen:

$$W_{\frac{1}{100}}(t) < 10^{-(2 \cdot 10^{16})}$$

$$W_{\frac{1}{1000}}(t) < 10^{-(2 \cdot 10^{14})}$$

$$W_{\frac{1}{10000}}(t) < 10^{-(2 \cdot 10^{12})}.$$

Von den hier zur Vereinfachung benutzten Annahmen ist für die Durchführbarkeit des Beweises nur die Annahme punktförmiger Moleküle wesentlich, nicht aber die Beschränkung auf das Eindimensionale. Eine geringe Modifikation der Beweismethode für die Formel (1) gestattet nämlich, ein entsprechendes Resultat auch im Falle von *mehreren Dimensionen* zu gewinnen.

Betrachten wir insbesondere das *Problem im Dreidimensionalen.* An Stelle der Strecke tritt dann ein rechteckiger Kasten, der halbiert ist durch eine zu zwei Grenzflächen parallele und 4 Seitenkanten von der Länge l halbierende Wand. Die Massenpunkte bewegen sich auf freier Bahn geradlinig gleichförmig und werden an den Wänden reflektiert.

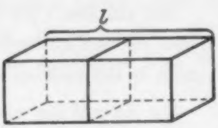


Fig. 1.

Die Zusammenstöße zwischen den Massenpunkten brauchen hier wiederum nicht berücksichtigt werden. Damit nämlich bei punktförmigen Massen ein Zusammenstoß innerhalb der Wartezeit t erfolgen kann, müssen die Komponenten der Anfangsgeschwindigkeiten $u_1, v_1, w_1, \ldots, u_n, v_n, w_n$, deren Werte durch die Bedingung

$$\sum_{\nu=1}^{n}(u_\nu^2 + v_\nu^2 + w_\nu^2) = n\,C^2$$

beschränkt sind, mindestens einem von endlich vielen Paaren linearer Gleichungen genügen, und es bilden also diese Wertsysteme von Anfangsgeschwindigkeiten bei der Darstellung auf der $(3n-1)$-dimensionalen Geschwindigkeits-Kugel eine Mannigfaltigkeit von nur $(3n-3)$ Dimensionen, so daß die

Wahrscheinlichkeit eines Zusammenstoßes (innerhalb der Zeit t) gleich 0 zu setzen ist.

Unter Beibehaltung der vorherigen Bezeichnungen ergibt sich, für $q \leqq \frac{1}{8}$,

$$W_q(t) < \frac{6}{q \cdot \sqrt{n}} \cdot e^{-n \cdot \left(2q^2 - \frac{l}{s}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\right)}, \tag{2}$$

und es folgt demnach für $t \geqq \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \frac{l}{C \cdot q^2}$:

$$W_q(t) < \frac{6}{q \cdot \sqrt{n}} \cdot e^{-nq^2},$$

und für $t \geqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{l}{C \cdot q^2}$:

$$W_q(t) < \frac{6}{q \cdot \sqrt{n}} \cdot e^{-\frac{1}{4}nq^2}.$$

Dabei ist die Anzahl n der Massenpunkte dem Volumen des Kastens, die Mindest-Wartezeit der Länge l proportional.

Da den genannten Resultaten nur eine methodische Bedeutung zukommt, so möchte ich mich darauf beschränken, die Beweisführung in dem einfacheren Fall, also für die Formel (1) anzugeben.

Um unnötige Wiederholungen zu vermeiden, knüpfe ich im folgenden an die Bezeichnungen der Einleitung an.

§ 1.

Ansatz.

Soll zur Zeit t die Abweichung von der Gleichverteilung mindestens q betragen, so muß entweder die Anzahl der Massenpunkte in der linken oder die Anzahl in der rechten Streckenhälfte $\leqq \frac{n}{2} - qn$ sein.

Die Anzahl der verschiedenen Verteilungen der n Massenpunkte auf die beiden Streckenhälften, bei welchen ν Punkte der linken und $(n - \nu)$ Punkte der rechten Hälfte angehören, ist $\binom{n}{\nu}$. Wird also mit s die größte, $\left(\frac{n}{2} - qn\right)$ nicht übertreffende ganze Zahl bezeichnet, so ist die Gesamtzahl aller Verteilungen, welche von der Gleichverteilung um mindestens q abweichen, gleich

$$2 \cdot \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{s}\right].$$

Und wenn demnach die Wahrscheinlichkeit einer jeden bestimmten Verteilung der n Punkte auf die Streckenhälften unterhalb einer Größe w liegt, so ist

$$W_q(t) < 2w \cdot \sum_{\nu=0}^{s} \binom{n}{\nu}. \tag{3}$$

Nun kommt es darauf an, eine solche Abschätzung w für die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Verteilung zu finden.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ seien die Abstände der Massenpunkte von dem linken Endpunkt der Strecke zur Anfangszeit. Dann gehört der h-te Massenpunkt zur Zeit t der linken oder der rechten Streckenhälfte an, je nachdem

$$-\frac{l}{2} \leqq v_h \cdot t + a_h - 2kl \leqq +\frac{l}{2}$$

oder

$$-\frac{l}{2} \leqq v_h t + a_h - (2k+1)l \leqq +\frac{l}{2}$$

(für einen *ganzzahligen* Wert von k) ist. (Die Geschwindigkeit v_h kann natürlich eventuell negativ sein.)

Um die Intervalle auf die Länge 1 zu bringen, setzen wir $v_h \cdot t = x_h \cdot l$.

Dann tritt an Stelle der Geschwindigkeits-Kugel

$$v_1^2 + \ldots + v_n^2 = nC^2$$

die Kugel

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = nC^2 \cdot \frac{t^2}{l^2} = n \cdot a^2,$$

und die Flächenstücke auf dieser Kugel sind den entsprechenden auf der Geschwindigkeits-Kugel proportional.

Die Bedingung für eine bestimmte Verteilung der Massenpunkte auf die beiden Hälften der Strecke stellt sich nun so dar, daß für jede Variable x_h Intervalle der Länge 1 von zulässigen Werten („zulässige Intervalle") und solche von auszuschließenden Werten einander ablösen.

In dem n-dimensionalen Raum der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ besteht das Gebiet $\mathfrak{G}$ der zulässigen Wertsysteme aus Würfeln von der Kantenlänge 1, deren Mittelpunkte ein Würfelgitter von der Kantenlänge 2 bilden; und die Wahrscheinlichkeit der betreffenden Verteilung der Massenpunkte wird also gemessen durch den Quotienten aus dem zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Teil der $(n-1)$-dimensionalen Kugelfläche

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = na^2$$

und der Gesamtfläche dieser Kugel $\mathfrak{K}$.

Der Nenner dieses Quotienten ist leicht zu berechnen. Bedeutet V_k das Volumen der Einheitskugel im k-dimensionalen Raum $\int\limits_{u_1^2+\ldots+u_k^2 \leqq 1} \ldots \int du_1 \ldots du_k$, so ist die Oberfläche der Kugel $\mathfrak{K}$ gleich

$$n \cdot V_n \cdot (a \cdot \sqrt{n})^{n-1}.$$

Um den Zähler in einfacher Weise abzuschätzen, berücksichtigen wir zunächst, daß die Größe eines Flächenelements der Kugel gleich ist der Projektion auf eine Koordinatenebene, dividiert durch den zugehörigen Richtungskosinus des Flächenelements. Dieser Richtungskosinus ist bei der Projektion in Richtung der x_h-Achse gleich dem Quotienten von x_h und dem Kugelradius $a \cdot \sqrt{n}$; indem wir verschiedene Teile der Kugel auf verschiedene Koordinaten-

ebenen projizieren, können wir erreichen, daß jeweils der reziproke Wert des Richtungskosinus höchstens gleich $\sqrt{n}$ ist.

Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich nun, wenn wir bei der Projektion in der x_h-Richtung die für die Koordinate x_h bestehende Bedingung außer Acht lassen, indem so an Stelle der komplizierten Einteilung, welche die $(n-1)$-dimensionale Kugel*fläche* $\mathfrak{K}$ durch die Würfel des Gebietes $\mathfrak{G}$ erfährt, die viel übersichtlichere Einteilung eines $(n-1)$-dimensionalen Kugel*inneren* tritt. Daß hierdurch in das Resultat der Abschätzung ein Faktor 2 hineinkommt, fällt in Anbetracht anderer gleich starker Vernachlässigungen nicht ins Gewicht[4]).

Auf Grund dieser Überlegung verfahren wir nun folgendermaßen. Wir zerlegen die Kugelfläche $\mathfrak{K}$ in n Teilbereiche, entsprechend den folgenden Ungleichungen:

erster Bereich: $|x_1| \geqq a, \quad |x_2| < a, \quad |x_3| < a, \quad \ldots, \quad |x_n| < a$

zweiter „ : $|x_2| \geqq a, \quad |x_3| < a, \quad \ldots, \quad |x_n| < a$

.
.
.

$(n-1)$-ter „ : $|x_{n-1}| \geqq a, \quad |x_n| < a$

n-ter „ : $|x_n| \geqq a.$

Der auf den h-ten Bereich entfallende Bestandteil des abzuschätzenden Flächenstückes der Kugel $\mathfrak{K}$ ist

$$< 2 \cdot \sqrt{n} \cdot \int_{\mathfrak{g}_h} \ldots \int dx_1 \ldots dx_{h-1} dx_{h+1} \ldots dx_n,$$

wobei das Integrationsgebiet $\mathfrak{g}_h$ bestimmt ist durch die Ungleichungen

$$|x_{h+1}| < a, \quad \ldots, \quad |x_n| < a, \quad x_1^2 + \ldots + x_{h-1}^2 \leqq n a^2 - x_{h+1}^2 - \ldots - x_n^2,$$

zu denen noch die Bedingung hinzutritt, daß jede der Integrationsvariablen auf die für sie zulässigen Intervalle beschränkt ist.

($\sqrt{n}$ ist die erwähnte Abschätzung für den reziproken Wert des Richtungskosinus des Flächenelements der Kugel, und der Faktor 2 ist deshalb notwendig, weil bei der Projektion auf eine Koordinatenebene je zwei gegenüberliegende Punkte der Kugel in denselben Punkt projiziert werden.)

Für $h = 1$ und $h = n$ ist die Schreibweise sachgemäß zu modifizieren.

Das Integrationsgebiet wird vergrößert, indem wir die Ungleichung

$$x_1^2 + \ldots + x_{h-1}^2 \leqq n a^2 - x_{h+1}^2 - \ldots - x_n^2$$

ersetzen durch:

$$x_1^2 + \ldots + x_{h-1}^2 \leqq n a^2.$$

---

[4]) Bei der Aufgabe im Dreidimensionalen kann dieser Faktor 2 erspart werden. Daher steht auch in der Formel (2) die Zahl 6 anstelle der Zahl 12 in der Formel (1).

Wir können dann die Integrationen nach den Variablen $x_{h+1}, \ldots, x_n$ einzeln ausführen, und da die Variablen auf die zulässigen Werte im Intervall von $(-a)$ bis $(+a)$ beschränkt sind, so ergibt sich, für $h = 2, \ldots, n$:

$$\int \ldots \int_{\mathfrak{g}_h} \leqq \left(\frac{2a+1}{2}\right)^{n-h} \cdot \int \ldots \int'_{x_1^2 + \ldots + x_{h-1}^2 \leqq n a^2} dx_1 \ldots dx_{h-1}, \tag{4}$$

wobei der Strich am Integralzeichen andeuten soll, daß die Integrationsvariablen der Beschränkung auf die zulässigen Intervalle unterworfen sind.

$$\int \ldots \int_{\mathfrak{g}_1} \leqq \left(\frac{2a+1}{2}\right)^{n-1}.$$

Wird für $m = 1, \ldots, n$, $R \geqq 0$

$$\int \ldots \int'_{x_1^2 + \ldots + x_m^2 \leqq R^2} dx_1 \ldots dx_m = J_m(R)$$

gesetzt, so ist (wenn V_0 den Wert 1 bedeutet):

$$J_m(R) \leqq \frac{1}{2^m} \cdot \sum_{\lambda=0}^{m} \binom{m}{\lambda} V_\lambda R^\lambda. \tag{5}$$

In der Tat gilt diese Ungleichung für $m = 1$, da $V_0 = 1$, $V_1 = 2$ und $J_1(R) \leqq \frac{2R+1}{2}$ ist; und wenn sie für einen Wert $m < n$ gültig ist, so gilt sie auch für $m+1$. Denn, wie man sich leicht klar macht, ist

$$J_{m+1}(R) = \int_{-R}^{+R}{}' J_m(\sqrt{R^2 - x_{m+1}^2})\,dx_{m+1} \leqq \frac{1}{2} \cdot \left\{\int_{-R}^{+R} J_m(\sqrt{R^2 - u^2})\,du + J_m(R)\right\},$$

also, gemäß der Annahme,

$$J_{m+1}(R) \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^m} \sum_{\lambda=0}^{m} \binom{m}{\lambda} \cdot \int_{-R}^{+R} V_\lambda \cdot (\sqrt{R^2 - u^2})^\lambda du + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^m} \cdot \sum_{\lambda=0}^{m} \binom{m}{\lambda} V_\lambda \cdot R^\lambda.$$

Andrerseits ist, auf Grund der Bedeutung von V_λ,

$$\int_{-R}^{+R} V_\lambda \cdot (\sqrt{R^2 - u^2})^\lambda du = V_{\lambda+1} \cdot R^{\lambda+1},$$

folglich

$$J_{m+1}(R) \leqq \frac{1}{2^{m+1}} \cdot \left\{V_0 + \sum_{\lambda=1}^{m} \left[\binom{m}{\lambda-1} + \binom{m}{\lambda}\right] V_\lambda \cdot R^\lambda + V_{m+1} \cdot R^{\lambda+}\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{m+1} \binom{m+1}{\lambda} V_\lambda \cdot R^\lambda.$$

Durch Anwendung der bewiesenen Ungleichung (5) erhalten wir aus (4), für $h = 2, \ldots, n$:

$$\int_{g_h} \cdots \int \leqq \left(\frac{2a+1}{2}\right)^{n-h} \cdot J_{h-1}(a \cdot \sqrt{n})$$

$$\leqq \left(\frac{2a+1}{2}\right)^{n-h} \cdot \frac{1}{2^{h-1}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{h-1} \binom{h-1}{\lambda} \cdot V_\lambda \cdot (a \cdot \sqrt{n})^\lambda,$$

und diese letzte Formel gilt auch für $h = 1$, wenn wir $\binom{0}{0}$ durch den Wert 1 definieren.

Indem wir nun über h (von 1 bis n) summieren und mit $2 \cdot \sqrt{n}$ multiplizieren, finden wir für den Zähler des betrachteten Wahrscheinlichkeits-Quotienten die Abschätzung

$$\left(\frac{2a+1}{2}\right)^{n-1} \cdot 2 \cdot \sqrt{n} \cdot \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{1}{2a+1}\right)^{h-1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{h-1} \binom{h-1}{\lambda} \cdot V_\lambda \cdot a^\lambda \cdot n^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Wie bereits erwähnt, hat der Nenner den Wert $n \cdot (a\sqrt{n})^{n-1} \cdot V_n$. Somit können wir in der Formel (3) für w den Ausdruck einsetzen:

$$\frac{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2a}\right)^{n-1}}{n^{\frac{n}{2}} \cdot V_n} \cdot \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{1}{2a+1}\right)^{h-1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{h-1} \binom{h-1}{\lambda} \cdot V_\lambda \cdot a^\lambda \cdot n^{\frac{\lambda}{2}},$$

d. h. $W_q(t)$ ist kleiner als dieser Ausdruck, multipliziert mit $2 \cdot \sum_{\nu=0}^{s} \binom{n}{\nu}$.

§ 2.

Ausführung der Abschätzung.

Um von der gewonnenen Abschätzung für $W_q(t)$ zu der zu beweisenden Formel (1) zu gelangen, genügt es, folgende zwei Ungleichungen abzuleiten:

$$2 \cdot \sum_{\nu=0}^{s} \binom{n}{\nu} < \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{e^{-2nq^2}}{q} \quad \text{für } q \leqq \frac{1}{8}, \tag{6}$$

$$\frac{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2a}\right)^{n-1}}{n^{\frac{n}{2}} \cdot V_n} \cdot \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{1}{2a+1}\right)^{h-1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{h-1} \binom{h-1}{\lambda} \cdot V_\lambda \cdot a^\lambda \cdot n^{\frac{\lambda}{2}} < \frac{12}{2^n} \cdot e^{\frac{n}{a \cdot \sqrt{2\pi}}}. \tag{7}$$

Da für $n \leqq 72$, $q \leqq \frac{1}{8}$ die rechte Seite der Ungleichung (1) größer als 1, mithin die Ungleichung trivial ist, so könnten wir uns beim Beweise auf die größeren Werte von n beschränken. Doch würde dies keinen Vorteil bieten, und es sollen darum die Formeln (6) und (7) allgemein für $n \geqq 2$ bewiesen werden.

Beweis von (6).

Die Summen von Binomialkoeffizienten werden in der Wahrscheinlichkeitstheorie meist nur asymptotisch abgeschätzt. Hier brauchen wir wirkliche Ungleichungen.

Wir gehen aus von der Stirlingschen Formel

$$n! = n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\sigma_n} \qquad (\text{für } n \geqq 1).$$

Hierin ist

$$0 < \sigma_n < \frac{1}{12 n},$$

und aus der Darstellung[5])

$$\sigma_n = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left(n + m + \frac{1}{2}\right) \log \frac{n+m+1}{n+m} - 1 \right\}$$

geht hervor, daß $\sigma_n > \sigma_{n+1}$ ist.

Für $0 < \nu < n$ erhalten wir hieraus in bekannter Weise

$$\binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu! \cdot (n-\nu)!} = \frac{n^n}{(n-\nu)^{n-\nu} \cdot \nu^\nu} \cdot \sqrt{\frac{n}{2\pi\nu(n-\nu)}} \cdot e^{\sigma_n - \sigma_\nu - \sigma_{n-\nu}}$$

$$(8) \quad \binom{n}{\nu} < \frac{n^{n-\nu}}{(n-\nu)^{n-\nu}} \cdot \frac{n^\nu}{\nu^{\nu+\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{n}{2\pi \cdot (n-\nu)}} = \frac{1}{\left(\frac{n-\nu}{n}\right)^{n-\nu}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\nu}{n}\right)^\nu} \cdot \sqrt{\frac{n}{2\pi\nu(n-\nu)}}.$$

Ist $\frac{n}{2} > \nu \geqq \frac{n}{4}$ und wird $\nu = \frac{n}{2} - \alpha n$ gesetzt, so daß

$$0 < \alpha \leqq \frac{1}{4}, \qquad 4\alpha^2 \leqq \frac{1}{4},$$

so ergibt sich:

$$\frac{1}{\left(\frac{n-\nu}{n}\right)^{n-\nu} \cdot \left(\frac{\nu}{n}\right)^\nu} = 2^n \cdot (1 - 4\alpha^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{1+2\alpha}{1-2\alpha}\right)^{-\alpha n}$$

$$= 2^n \cdot e^{-n \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2\alpha)^{2k}}{(2k-1) \cdot 2k}} < 2^n \cdot e^{-2n\alpha^2}$$

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi\nu(n-\nu)}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4\alpha^2}} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

also

$$\binom{n}{\nu} < \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot e^{-2n\alpha^2}.$$

Setzen wir ferner

$$s = \frac{n}{2} - \varkappa n,$$

so ist

$$\varkappa \geqq q,$$

und für

$$\nu = \frac{n}{2} - \alpha n \leqq s$$

---

[5]) Vgl. z. B. Landau, „Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale" (Teubner, 1918) Satz 157, S. 77—78.

ist
$$\alpha = \varkappa + \frac{r}{n},$$
wobei r eine ganze Zahl $\geqq 0$ bedeutet.

Demnach ergibt sich $\left(\text{für } s \geqq \frac{n}{4},\ q \leqq \frac{1}{8}\right)$:
$$\sum_{\frac{n}{4} \leqq \nu \leqq s} \binom{n}{\nu} < \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} e^{-2n\left(\varkappa + \frac{r}{n}\right)^2} < \frac{2^n}{\sqrt{n}} \sum_{r=0}^{\infty} e^{-2nq^2 - 4qr} = \frac{2^n \cdot e^{-2nq^2}}{\sqrt{n} \cdot (1 - e^{-4q})}$$
$$< \frac{2^n \cdot e^{-2nq^2}}{\sqrt{n} \cdot \left(4q - \frac{(4q)^2}{1 \cdot 2}\right)} \leqq \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{e^{-2nq^2}}{3q}.$$

Zur Abschätzung von $\sum\limits_{\nu < \frac{n}{4}} \binom{n}{\nu}$ berücksichtigen wir zunächst, daß für $\nu < \frac{n}{4}$
$$\sqrt{\frac{n}{2\pi(n-\nu)}} < \sqrt{\frac{4}{6\pi}} < \frac{1}{2} \text{ ist.}$$
Ferner wenden wir die für beliebige positive Werte u und c gültige Ungleichung
$$(9) \qquad \left(\frac{1}{u}\right)^u \leqq \left(\frac{1}{c}\right)^u \cdot e^{c-u}$$
an. Aus dieser folgt
$$\left(\frac{1}{n-\nu}\right)^{n-\nu} \leqq \frac{e^\nu}{n^{n-\nu}}, \qquad \frac{n^{n-\nu}}{(n-\nu)^{n-\nu}} \leqq e^\nu;$$
$$\left(\frac{1}{\nu + \frac{1}{2}}\right)^{\nu + \frac{1}{2}} \leqq \left(\frac{4}{n}\right)^{\nu + \frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{n}{4} - \nu - \frac{1}{2}},$$
also für $\nu \geqq 1$:
$$\frac{1}{\nu^{\nu + \frac{1}{2}}} \leqq \frac{2 \cdot 4^\nu}{n^\nu \cdot \sqrt{n}} \cdot e^{\frac{n}{4}} \cdot e^{-\nu - \frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\nu + \frac{1}{2}}{\nu}\right)^{\nu + \frac{1}{2}} < \frac{2 e^{\frac{n}{4}}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{4^\nu \cdot e^{-\nu}}{n^\nu} \cdot e^{\frac{1}{4\nu}},$$
$$\frac{n^\nu}{\nu^{\nu + \frac{1}{2}}} < \frac{3 \cdot e^{\frac{n}{4}}}{\sqrt{n}} 4^\nu \cdot e^{-\nu}.$$

Gemäß der Formel (8) ist somit für $1 \leqq \nu < \frac{n}{4}$
$$\binom{n}{\nu} < \frac{3}{2} \cdot \frac{e^{\frac{n}{4}}}{\sqrt{n}} \cdot 4^\nu,$$
und dies gilt auch für $\nu = 0$.

Wir erhalten also
$$\sum_{0 \leqq \nu < \frac{n}{4}} \binom{n}{\nu} < \frac{3}{2} \cdot \frac{e^{\frac{n}{4}}}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{\nu < \frac{n}{4}} 4^\nu < \frac{3}{2} \frac{e^{\frac{n}{4}}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{4^{\frac{n+3}{4}}}{3} = \sqrt{2} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{e}{4}\right)^{\frac{n}{4}},$$

und die Zusammenfassung mit dem anderen Summen-Bestandteil ergibt, für $q \leqq \frac{1}{8}$:

$$\sum_{\nu=0}^{s} \binom{n}{\nu} < \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \left(\frac{e}{4}\right)^{\frac{n}{4}} + \frac{e^{-2nq^2}}{3q} \right) < \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{e^{-2nq^2}}{2q}.$$

(Denn

$$\left(\frac{e}{4}\right)^{\frac{n}{4}} = e^{\frac{n}{4}(1-2\log 2)} < e^{-\frac{n}{12}},$$

folglich

$$\sqrt{2} \cdot \left(\frac{e}{4}\right)^{\frac{n}{4}} < \frac{e^{-2nq^2}}{6q} \cdot \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{8} \cdot e^{-\frac{n}{12}+\frac{2n}{64}} < \frac{e^{-2nq^2}}{6q}.)$$

Beweis von (7).

Es kommt zunächst darauf an, die Größen V_λ nach unten und nach oben abzuschätzen. Mit Hilfe der Rekursionsformel

$$V_m = V_{m-1} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \, d\varphi \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

ergibt sich die Darstellung

$$V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \qquad V_{2k-1} = \frac{2^{2k} \cdot \pi^{k-1} \cdot k!}{(2k)!},$$

und auf Grund der Stirlingschen Formel erhält man hieraus für $k \geqq 1$:

$$V_{2k} = \left(\frac{e \cdot \pi}{k}\right)^k \cdot \frac{e^{-\sigma_k}}{\sqrt{2\pi k}}, \qquad V_{2k-1} = \left(\frac{e \cdot \pi}{k}\right)^k \cdot \frac{e^{\sigma_k - \sigma_{2k}}}{\pi \cdot \sqrt{2}}.$$

Da $0 < \sigma_{2k} < \sigma_k < \frac{1}{12k} < \frac{1}{6}$ und, für $k \geqq 2$,

$$\frac{1}{k^k} = \frac{1}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^k} \cdot \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^k \geqq \frac{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^k} > \frac{e^{-\frac{2}{3}}}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^k},$$

also

$$\left(\frac{e\pi}{k}\right)^k \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{2}} > \left(\frac{e\pi}{k - \frac{1}{2}}\right)^{k-\frac{1}{2}} \frac{e^{-\frac{1}{6}}}{\sqrt{\pi(2k-1)}},$$

so ist für gerades sowie für ungerades $n \geqq 2$

$$V_n > \left(\frac{2e\pi}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{6}}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Da andererseits für $k \geqq 1$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \left(\frac{e\pi}{k}\right)^k = \left(\frac{e\pi}{k + \frac{1}{2}}\right)^{k+\frac{1}{2}} \frac{\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{e\pi}},$$

$$\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{k+\frac{1}{2}} < e^{\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4k^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8k^3}\right)}$$

$$< e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4k}-\frac{1}{12k}} \leqq e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}},$$

also

$$V_{2k} < \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\cdot\left(\frac{e\pi}{k}\right)^{k} < \frac{e^{\frac{1}{6}}}{\pi\cdot\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{e\pi}{k+\frac{1}{2}}\right)^{k+\frac{1}{2}} < \frac{e^{-\frac{1}{6}}}{\pi}\cdot\left(\frac{2e\pi}{2k+1}\right)^{\frac{2k+1}{2}}$$

und

$$V_{2k-1} < \left(\frac{e\pi}{k}\right)^{k}\cdot\frac{e^{\frac{1}{12k}}}{\pi\cdot\sqrt{2}} < \frac{e^{-\frac{1}{6}}}{\pi}\cdot\left(\frac{2e\pi}{2k}\right)^{\frac{2k}{2}},$$

so ist für $\mu \geqq 2$

$$V_{\mu-1} < \frac{e^{-\frac{1}{6}}}{\pi}\cdot\left(\frac{2e\pi}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{2}};$$

und dies gilt auch noch für $\mu = 1$.

Gemäß der Ungleichung (9) ist für $h > 0$

$$\left(\frac{e}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{2}} \leqq \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{\mu}{2}}\cdot e^{\frac{h}{2}},$$

folglich

$$V_{\mu-1} < \frac{e^{-\frac{1}{6}}\cdot e^{\frac{h}{2}}}{\pi}\cdot\left(\frac{2\pi}{h}\right)^{\frac{\mu}{2}}.$$

Wenden wir die gefundenen Abschätzungen auf die linke Seite der Ungleichung (7) an, nachdem wir zuvor $\lambda = \mu - 1$ gesetzt, also

$$\sum_{\lambda=0}^{h-1}\binom{h-1}{\lambda}\cdot V_\lambda\cdot a^\lambda\cdot n^{\frac{\lambda}{2}}$$

in

$$\sum_{\mu=1}^{h}\frac{\mu}{h}\cdot\binom{h}{\mu}\cdot V_{\mu-1}\cdot(a\cdot\sqrt{n})^{\mu-1}$$

umgeformt haben [*]), so reduziert sich die zu beweisende Ungleichung auf folgende:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\left(1+\frac{1}{2a}\right)^{n-1}\cdot 2\cdot\sqrt{n}}{(2e\pi)^{\frac{n}{2}}\cdot\sqrt{\pi}}\cdot\sum_{h=1}^{n}\frac{e^{\frac{h}{2}}}{(2a+1)^{h-1}\cdot h}\cdot\sum_{\mu=1}^{h}\mu\cdot\binom{h}{\mu}\cdot\left(\sqrt{\frac{2\pi}{h}}\right)^{\mu}\cdot(a\cdot\sqrt{n})^{\mu-1} \\ &\qquad < \frac{12}{2^n}e^{\frac{n}{a\cdot\sqrt{2\pi}}}. \end{aligned}\right.$$

[*]) Diese Umformung gilt auch für $h = 1$.

Die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{h} \mu \cdot \binom{h}{\mu} \cdot \left(\sqrt{\frac{2\pi}{h}}\right)^{\mu} \cdot (a \cdot \sqrt{n})^{\mu-1}$$

läßt sich auswerten; sie ist gleich

$$\sqrt{\frac{2\pi}{h}} \cdot h \cdot \left(1 + a \cdot \sqrt{\frac{2\pi n}{h}}\right)^{h-1} = h \cdot a^{h-1} \cdot (\sqrt{n})^{h-1} \cdot \left(\sqrt{\frac{2\pi}{h}}\right)^{h} \cdot \left(1 + \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\frac{h}{2\pi n}}\right)^{h-1}.$$

Setzen wir diesen Wert ein und beachten, daß

$$1 + \frac{1}{a}\sqrt{\frac{h}{2\pi n}} \leqq 1 + \frac{1}{a \cdot \sqrt{2\pi}}$$

und, gemäß der Formel (9),

$$\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right)^{h} \leqq \frac{e^{\frac{n}{2} - \frac{h}{2}}}{(\sqrt{n})^{h}}$$

ist, so finden wir als Abschätzung für die linke Seite der Ungleichung (10):

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{2a}\right)^{n-1} \cdot 2\sqrt{2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{a\sqrt{2\pi} + 1}{2a + 1}\right)^{h-1};$$

alles übrige hebt sich weg.

Der erhaltene Ausdruck ist nun in der Tat $< \frac{12}{2^n} \cdot e^{\frac{n}{a\sqrt{2\pi}}}$. Denn es ist

$$\sum_{h=1}^{n} \left(\frac{a\sqrt{2\pi} + 1}{2a + 1}\right)^{h-1} < \frac{\left(\frac{a\sqrt{2\pi}+1}{2a+1}\right)^{n}}{\frac{a\sqrt{2\pi}+1}{2a+1} - 1}$$

und

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{2a}\right)^{n-1} \cdot 2\sqrt{2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} = \frac{(2a+1)^{n-1} \cdot 4a \cdot \sqrt{2}}{2^n \cdot (a \cdot \sqrt{2\pi})^n},$$

folglich

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{2a}\right)^{n-1} \cdot 2\sqrt{2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \sum_{h=1}^{n} < \frac{\left(1 + \frac{1}{a \cdot \sqrt{2\pi}}\right)^{n}}{2^n} \cdot \frac{4a \cdot \sqrt{2}}{a \cdot (\sqrt{2\pi} - 2)}$$

$$< \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{2^n} \cdot \left(1 + \frac{1}{a \cdot \sqrt{2\pi}}\right)^{n} < \frac{12}{2^n} \cdot e^{\frac{n}{a \cdot \sqrt{2\pi}}}.$$

(Eingegangen am 5. 9. 1921.)

Risoluzione dell' equazione funzionale che caratterizza le onde periodiche in un canale molto profondo.

Von

Tullio Levi-Civita in Rom.

1. Posizione del problema.

Finora si conosce una sola soluzione rigorosa del problema delle onde atte a propagarsi in un canale senza alterazione di forma: quella trocoidale scoperta da Gerstner nel 1802. Ma le onde trocoidali presentano il noto inconveniente di corrispondere a movimento vorticoso delle particelle fluide, talchè non potrebbero sorgere per via conservativa. Lo schema meccanico della propagazione ondosa deve essere irrotazionale. Classiche soluzioni approssimate (le così dette onde semplici) furono assegnate da Airy; e altri notevoli risultati di approssimazione ulteriore, concernenti le onde periodiche, si debbono a Stokes, Rayleigh ed altri[1]).

La trattazione matematica rigorosa, nel caso di un canale molto profondo[2]), può in definitiva farsi dipendere da una equazione integrale *non* lineare. Sarebbe agevole il rendersene conto, ma noi ci limitiamo alla affermazione, perchè il problema sarà qui posto sotto un aspetto più direttamente legato all'origine idrodinamica, che è il seguente:

Determinare una funzione

$$\omega = \vartheta + i\tau$$

della variabile complessa $\zeta = \varrho e^{i\alpha}$***, regolare entro il cerchio*** $|\zeta| < 1$***, continua assieme alla sua derivata prima sulla circonferenza*** C $(|\zeta| = \varrho = 1)$***, la quale si annulli con*** ζ ***e verifichi su*** C ***la relazione***

[1]) Veggansi per es. le pagine 410 e 418 del trattato del Lamb "Hydrodynamics" (4ª edizione), Cambridge, University Press, 1918.

[2]) Per un canale di profondità finita, si arriva invece ad una equazione mista (cioè insieme differenziale e alle differenze finite). Cfr. "Sulle onde progressive di tipo permanente", Rend. della R. Acc. dei Lincei (5) **16** (2° semestre 1907), pp. 776—790.

(I) $$\frac{d\tau}{d\sigma} - pe^{-3\tau}\sin\vartheta = 0,$$

designando p una costante positiva a priori indeterminata.

L'incognita ω deve inoltre soddisfare alla limitazione

$$|e^{-i\omega} - 1| < 1$$

ossia [tenuto conto che $e^{-i\omega} = e^{\tau}(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)$] alla

(D) $$2\cos\vartheta > e^{\tau},$$

la quale implica in particolare

$$|\vartheta| < \frac{\pi}{2}, \qquad \tau < \log 2,$$

ed è *automaticamente verificata per $|\omega|$ abbastanza piccolo.*

Giova fin d'ora scrivere la (I) anche sotto la forma

(I′) $$\frac{d\tau}{d\sigma} - p\vartheta = P(\vartheta, \tau)$$

con

(1) $$P(\vartheta, \tau) = p\{e^{-3\tau}\sin\vartheta - \vartheta\}.$$

Ciò allo scopo evidente di raccogliere nel primo membro la parte lineare rispetto agli argomenti ϑ, τ, per modo che $P(\vartheta, \tau)$ risulta di secondo ordine nell'intorno di $\vartheta = 0$, $\tau = 0$.

Circa il significato di p, ϑ, τ basterà ritenere:

1°. che

(2) $$p = \frac{g\lambda}{2\pi c^2},$$

dove si designa con c la velocità di propagazione delle onde periodiche di cui si tratta, con λ la loro lunghezza, e con g l'accelerazione della gravità;

2°. che ϑ rappresenta la inclinazione sulla orizzontale della velocità relativa (delle particelle materiali rispetto all'onda), talchè sulla circonferenza C (che corrisponde al pelo libero) ϑ è proprio l'inclinazione del profilo dell' onda sull' orizzonte;

3°. che ce^{τ} rappresenta la grandezza della detta velocità relativa.

2. Indicazione del metodo e dei risultati.

Si incomincia (§§ 3—8) coll'esame approfondito del problema ausiliario in cui la (I′) è ridotta alla sua parte lineare, figurando nel secondo membro una funzione nota in luogo di $P(\vartheta, \tau)$. Concettualmente il problema si potrebbe far rientrare nella teoria generale nelle equazioni integrali lineari di seconda specie (tipo Fredholm-Hilbert), ma in vista della applicazione alle onde si impone l'impiego di mezzi più atti al calcolo esplicito.

Se ne desume poi molto spontaneamente (§ 10) un algoritmo di approssimazioni successive per gli integrali di equazioni funzionali alquanto più generali della (I); il teorema fondamentale di esistenza (§ 11) sotto limitazioni qualitative di tipo ben prevedibile (§§ 9 e 12); nonchè il teorema di unicità (§ 13).

Dal punto di vista analitico non sarà forse inutile osservare che il procedimento testè delineato è applicabile quasi senza modificazione ad una classe molto ampia di equazioni non lineari, che comprende quella contemplata dal sig. E. Schmidt nella III parte delle sue fondamentali ricerche "Zur Theorie der linearen und nicht-linearen Integralgleichungen"[3]), e da lui risoluta mediante sviluppo in serie di potenze (integrali): felice estensione del metodo dei limiti di Cauchy. Viceversa (previa qualche trasformazione) le questioni qui studiate si potrebbero anche subordinare alla teoria generale dello Schmidt. Ma io ho preferito una trattazione autonoma, sia per prepararmi, come già accennai a proposito dei problemi ausiliari, formule risolutive praticamente maneggevoli, sia per mostrare come sia fecondo, anche in quest'ambito funzionale, l'algoritmo così elementare e così universale delle approssimazioni successive.[4])

Tornando alle onde, mi si consenta di riferire il pensiero di Lord Rayleigh quale risulta dalla prefazione dell'ultimo lavoro[5]) da lui dedicato all'argomento. Dopo aver riassunte le critiche di scarsa convergenza numerica e di dubbia convergenza teorica, mosse al procedimento di Stokes, egli rileva giustamente che la questione esistenziale è distinta da quella della convergenza di uno speciale algoritmo, e conclude: "Of course a strict mathematical proof of their existence is a desideratum; but I think that the reader, who follows the results of the calculations here put forward, is likely to be convinced that permanent waves of moderate height do exist".

La nostra ricerca risponde al desiderato di Lord Rayleigh, rimanendo tuttavia ancora da verificare (§ 15) se la radice b di una certa equazione sta effettivamente nel limite al disotto del quale è sicura la convergenza del procedimento costruttivo. Per ragioni di spazio e di tempo rimando questa dis-

[3]) Math. Ann. **65** (1908), pp. 370–399.

[4]) Da questo stesso concotto sono dominati i notevolissimi studi del sig. L. Lichtenstein sulle figure di equilibrio di masse fluide ruotanti. Essi fanno capo ad una equazione funzionale, più precisamente integro-differenziale, di tipo molto complesso, pervenendo a sviscerarne le proprietà e ad integrarla per approssimazioni successive. Cfr. in particolare la seconda parte delle "Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten usw.", Math. Zeitschrift **7** (1920), Cap. I–III, pp. 126–182; nonchè la prima parte delle "Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper", ibidem **10** (1921), pp. 130–158.

[5]) "On periodic irrotational waves at the surface of deep water", Phil. Magazine **33**, May 1917, pp. 381–389.

cussione ad altro lavoro, in cui sarà fatto debito posto anche al lato meccanico della questione.

Del resto ha già interesse meccanico il risultato, dedotto a § 14 del presente scritto, che possono esistere soluzioni rigorose della (I) soltanto a patto che p sia un numero intero.

Riferendoci al caso tipico $p = 1$, ciò vuol dire, in base alla (2), che, *anche per onde di altezza finita, è esattamente verificata l'equazione di Airy*

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}.$$

Le approssimazioni di Stokes e Rayleigh conducono invece ad una relazione meno semplice in cui interviene anche l'altezza dell'onda, risultandone, per qualsiasi altezza finita, alquanto accresciuto il valore di c spettante ad un λ assegnato, il che implica, in base alla (2), $p < 1$.

Si sarebbe tratti ad inferirne che, almeno qualitativamente, le cose andranno nello stesso modo anche al limite. Invece non è così; o più esattamente (sotto le ipotesi ammesse dai due illustri autori) non può esistere il limite, perchè incompatibile col fatto rigorosamente accertato che deve comunque essere intero il valore di p.

3. Questioni ausiliarie — Risoluzione per serie.

Siano $\sum_1^\infty{}_n h_n$, $\sum_1^\infty{}_n k_n$ due serie, a termini reali e costanti, assolutamente convergenti, con che

$$\chi(\sigma) = \sum_1^\infty{}_n (h_n \cos n\sigma + k_n \sin n\sigma) \tag{3}$$

rappresenta una funzione di σ reale, uniforme, continua e *a valor medio nullo* sulla circonferenza C.

Cerchiamo una funzione $\omega(\zeta)$ la quale, comportandosi pel resto nel modo dichiarato al § 1, verifichi sul contorno, in luogo della (I), la equazione lineare non omogenea

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - p\vartheta = \chi(\sigma). \tag{II}$$

In base alle premesse, è intanto naturale di porre

$$\omega = \sum_1^\infty{}_n a_n \zeta^n,$$

i coefficienti a_n essendo costanti, in generale complesse, di cui metteremo in evidenza le parti reale ed immaginaria, assumendo

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n.$$

Avremo, su C,

$$\begin{cases} \vartheta = \sum_1^\infty {}_n (\alpha_n \cos n\sigma - \beta_n \sin n\sigma), \\ \tau = \sum_1^\infty {}_n (\beta_n \cos n\sigma + \alpha_n \sin n\sigma), \end{cases}$$

con che, *per p non intero*, la (II) porge senza riserve

$$\alpha_n = \frac{h_n}{n-p}, \quad \beta_n = \frac{k_n}{n-p} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ne risulta che

$$\omega = \sum_1^\infty {}_n \frac{h_n - i k_n}{n-p} \zeta^n \tag{4}$$

verifica la (II), annullandosi per $\zeta = 0$ e comportandosi nel modo voluto entro e sopra C.

Per p intero, la equazione omogenea dedotta dalla (II), cioè

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - p\vartheta = 0,$$

comporta ∞^2 soluzioni non nulle che si compendiano in

$$\omega = a\zeta^p,$$

dove $a = \alpha + i\beta$ designa una costante complessa arbitraria.

I valori interi del parametro p costituiscono ovviamente gli *autovalori* dell'equazione funzionale (II) che sarebbe facile, per quanto superfluo ai fini che qui ci proponiamo, di presentare sotto la forma canonica di equazione integrale lineare di seconda specie.[6]) In corrispondenza ai suddetti valori interi di p, la (II) può essere soddisfatta solo a patto che in $\chi(\sigma)$ si annullino h_p, k_p; essa ammette allora ∞^2 soluzioni. Ma nemmeno questo ci interessa.

Importa piuttosto, per p intero, assumere come ausiliaria, in luogo della (II), la equazione funzionale

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - p\vartheta + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \vartheta(\sigma_1)\cos p(\sigma - \sigma_1)\, d\sigma_1 = \chi(\sigma). \tag{III}$$

Ammesso come sopra lo sviluppo $\omega = \sum_1^\infty {}_n a_n \zeta^n$, si trova subito, per $n \neq p$,

$$a_n = \frac{h_n - i k_n}{n-p},$$

nonchè

$$a_p = h_p - i k_p,$$

---

[6]) Cfr. il Cap. X dei classici "Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen„ [Leipzig, Teubner, 1912] dell' Hilbert.

e quindi

$$(5)\qquad \omega=(h_p-ik_p)\zeta^p+\sum_{1}^{\infty}{}'_n\frac{h_n-ik_n}{n-p}\zeta^n,$$

dove l'apice nel sommatorio sta a designare che si deve escludere il valore p di n.

4. Espressione delle incognite mediante integrali definiti. — Semplificazione delle ipotesi concernenti la funzione assegnata χ.

Particolare interesse ha naturalmente la espressione della ω proprio sul contorno $|\zeta|=1$ cui si riferisce l'equazione funzionale caratteristica [(II) o (III)]. Ed è importante fissare nettamente il comportamento qualitativo al contorno in relazione alle ipotesi che si fanno circa l'analogo comportamento dei dati della questione, cioè della funzione $\chi(\sigma)$. Per trarne il miglior rendimento (il che si rivela necessario quando si vuol applicare la formula risolutiva alla integrazione di altre equazione funzionali per approssimazioni successive), è opportuno procurarsi le espressioni delle risolventi (4), (5) mediante integrali definiti portanti sulla funzione $\chi(\sigma)$. Ciò si potrebbe ottenere riprendendo *ab initio* le equazioni funzionali (II) e (III); presentandole quali equazioni integrali lineari, per es. nella sola ϑ; formandone il nucleo risolvente e ricavandone in tal guisa ϑ, e poi τ. Ma è più conveniente trasformare i risultati già ottenuti mediante sviluppo in serie.

All' uopo cominciamo col porre

$$(6)\qquad N(z)=\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{z^n}{n-p},$$

per p non intero;

$$(7)\qquad \mathfrak{R}(z)=z^p+\sum_{1}^{\infty}{}'_n\frac{z^n}{n-p},$$

per p intero, con che le serie sono uniformemente convergenti in ogni campo (di valori di z) interno a C.

Ove in particolare si assuma $z=\frac{\zeta}{\zeta_1}$ con $|\zeta|<1$ e ζ_1 sulla circonferenza C, cioè del tipo $e^{i\sigma_1}$, le serie stesse risultano uniformemente convergenti rispetto $\alpha\sigma_1$, nell' intervallo $(-\pi,\pi)$.

Si verifica immediatamente, integrando termine a termine, che le (4), (5) si possono scrivere sotto la forma

$$(4')\qquad \omega(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}N(\zeta e^{-i\sigma_1})\chi(\sigma_1)d\sigma_1,$$

$$(5')\qquad \omega(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathfrak{R}(\zeta e^{-i\sigma_1})\chi(\sigma_1)d\sigma_1.$$

Per $|\zeta| < 1$ queste equivalgono dunque alle precedenti. Resta da legittimare e da studiare i valori al contorno. Vedremo che ne risulterà un vantaggio quanto alle ipotesi preliminari atte ad assicurare la validità delle formule. Nell' impostare i nostri calcoli (§ 3), abbiamo ammesso per la χ uno sviluppo di Fourier assolutamente convergente (anche quando seni e coseni si sostituivano coll'unità). *Arriveremo alla conclusione che basta supporre $\chi(\sigma)$ periodica, continua assieme alla sua derivata prima e dotata di valor medio nullo, perchè le formule* (4'), (5'), *postovi $\zeta = e^{i\sigma}$, definiscano effettivamente le incognite delle equazioni funzionali* (II) *e* (III).

5. Studio dei nuclei risolventi.

Occupiamoci intanto della funzione $N(z)$. Per fissarne il comportamento, quando z arriva o varia su C, basta far uso della identità, valida per qualsiasi n, quando p non è intero,

$$\frac{1}{n-p} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1-\frac{p}{n}} = \frac{1}{n} + \frac{p}{n^2} + \frac{p^2}{n^2(n-p)}.$$

Supposto per un momento ancora $|z| < 1$, si immagini scisso il termine generale della serie (6) in tre addendi, corrispondenti ai tre della superiore identità, dopodichè, essendo

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{z^n}{n} = \log\frac{1}{1-z},$$

ove si ponga per brevità

$$(8) \qquad \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{z^n}{n^2} = A(z),$$

$$(9) \qquad p^2 \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{z^n}{n^2(n-p)} = N^*(z),$$

risulta

$$(6') \qquad N(z) = \log\frac{1}{1-z} + p\,A(z) + N^*(z).$$

Da questa espressione segue senza difficoltà il comportamento al contorno di N e della sua derivata. Il primo addendo ha già una forma tipica. Esaminiamo gli altri due.

La serie che definisce A rimane uniformemente convergente anche su C, cioè per $z = e^{is}$ (s reale); perciò l'addendo A rappresenta una funzione continua anche sul contorno (o quando dall'interno si arriva al contorno); non così la sua derivata, che ha però appena un infinito logaritmico per $s = 0$ ($z = 1$), come appare dalla (8), la quale implica

$$(8') \qquad \frac{dA}{dz} = \log\frac{1}{1-z}.$$

L'addendo N^* definito dalla (9) rimane continuo assieme alla sua derivata prima. In definitiva la parte asintotica di N su C si riduce ad una singolarità logaritmica per $s=0$; con ciò la N rimane integrabile su C. La sua derivata

$$\frac{dN}{dz}=\frac{1}{1-z}+p\log\frac{1}{1-z}+\frac{dN^*}{dz}$$

ha invece, oltre ad una singolarità logaritmica, un infinito di primo ordine, sempre per $s=0$.

Dacchè, per $|z|<1$, si ha identicamente, in base alla (6),

$$z\frac{dN}{dz}-pN=\sum_{1}^{\infty}{}_n z^n=\frac{z}{1-z},$$

questa relazione differenziale seguita a valere anche sul contorno, più precisamente in ogni punto di regolarità, cioè per qualunque s, eccettuato soltanto il punto singolare $s=0$. Sostituendo e^{is} a z e *scrivendo per brevità* $N(s)$, $N'(s)$ *in luogo di* $N(e^{is})$, $\frac{d}{ds}N(e^{is})$, *rimane acquisita, per* $s \neq 0$, *la identità*

$$N'(s)-ipN(s)=i\frac{e^{is}}{1-e^{is}}. \tag{10}$$

Scindiamo il reale dall'immaginario in N, A, N^*, ponendo

$$N=N_1+iN_2,$$
$$A=A_1+iA_2,$$
$$N^*=N_1^*+iN_2^*.$$

Notiamo subito che N_1^*, N_2^* sono, al pari di N^*, continue assieme alle rispettive derivate anche sul contorno C; A_1 e A_2 sono esse stesse continue, in base alle (8), mentre, per essere $\frac{dA}{dz}=\log\frac{1}{1-z}$, le derivate sono al più affette da singolarità logaritmica e in particolare rimangono integrabili.

Notiamo ancora che, per $z=e^{is}$,

$$1-z=(1-\cos s)-i\sin s=2\sin\frac{s}{2}\,e^{i\frac{s-\pi}{2}}.$$

Di qua apparisce che, sull'arco $(0,\pi)$, essendo $\sin\frac{s}{2}$ positivo, il modulo d $1-z$ è $2\sin\frac{s}{2}$, e l'argomento è $\frac{s-\pi}{2}$ (si intende, a meno di multipli interi di 2π); sull'arco $(0,-\pi)$, si ha invece

$$2\sin\frac{s}{2}=2\left|\sin\frac{s}{2}\right|e^{i\pi},$$

l'argomento risultando in conformità $\frac{s+\pi}{2}$. Con ciò, ove si separi in $\log\frac{1}{1-z}$

il reale dall'immaginario, si ha, per $z = e^{is}$ (e per quel ramo uniforme entro C, che si annulla nel centro),

$$\log \frac{1}{1-z} = \log \frac{1}{2\left|\sin \frac{s}{2}\right|} - i\frac{s \pm \pi}{2}, \tag{11}$$

in cui, al variare di s fra $-\pi$ e π, va preso il segno superiore o l'inferiore secondochè s è positivo o negativo. Come si vede, il coefficiente di i presenta un brusco salto di π per $s = 0$; rimane invece continuo nel punto diametralmente opposto di C, annullandosi per $s = \pm\pi$. La derivata si riduce a $-\frac{1}{2}$ su tutto C, perciò, mentre

$$N_1 = \log \frac{1}{2\left|\sin \frac{s}{2}\right|} + pA_1 + N_1^* \tag{12}$$

resta, al pari di N, integrabile su C, ma non si può dire altrettanto della sua derivata $N_1' = \frac{dN_1}{ds}$; N_2 ed N_2' si mantengono entrambe integrabili su C. Infatti

$$N_2 = -\frac{s \pm \pi}{2} + pA_2 + N_2^* \tag{13}$$

ha una semplice discontinuità di prima specie per $s = 0$. La discontinuità scompare nella derivata N_2', la quale ha nient'altro che un infinito logaritmico proveniente dall'addendo pA_2', cioè, in virtù della (8′), dal coefficiente di i in

$$pe^{is} \log \frac{1}{1-e^{is}}.$$

Dacchè

$$\frac{ie^{is}}{1-e^{is}} = \frac{\frac{1}{2}e^{i\frac{s}{2}}}{\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{s}{2}} - e^{-i\frac{s}{2}}\right)} = \frac{1}{2}\cot\frac{s}{2} + i\frac{1}{2},$$

la (10), eguagliando i coefficienti di i, ci dà in particolare

$$N_2'(s) - pN_1(s) = \frac{1}{2}. \tag{10′}$$

Analogo comportamento qualitativo presenta il nucleo (complesso) $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + i\,\mathfrak{N}_2$ ($\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ reali) definito dalla (7). Si ha infatti, al posto della (6′),

$$\mathfrak{N} = z^p + \left(\log\frac{1}{1-z} - \frac{z^p}{p}\right) + p\left(A(z) - \frac{z^p}{p^2}\right) + \mathfrak{N}^* \tag{7′}$$

con

$$\mathfrak{N}^* = p^2 \sum_{1}^{\infty}{}_n' \frac{z^n}{n^2(n-p)},$$

e ciò dimostra l'asserto, dato che p va qui supposto intero (oltrechè positivo), e che quindi z^p rappresenta una funzione regolare.

La (7) dà poi immediatamente, per $|z|<1$,

$$z\frac{d\mathfrak{N}}{dz}-p\mathfrak{N}=\sum_{1}^{\infty}{}'_n\, z^n=\frac{z}{1-z}-z^p.$$

Si ha dunque, in luogo della (10),

$$\mathfrak{N}'(s)-ip\mathfrak{N}(s)=\frac{i\,e^{is}}{1-e^{is}}-i\,e^{ips}, \tag{14}$$

e da questa, eguagliando i coefficienti di i nei due membri,

$$\mathfrak{N}_2'(s)-p\mathfrak{N}_1(s)=\frac{1}{2}-\cos ps. \tag{14'}$$

6. Considerazione diretta dei valori al contorno forniti dalle (4'), (5'). Verificazione delle (II), (III).

Se anche ζ viene in C e si riduce quindi a e^{is} (con s reale), l'argomento dei nuclei nelle (5'), (6') assume l'aspetto $e^{i(\sigma-\sigma_1)}$. Dacchè abbiamo convenuto di designare $N(e^{is})$ semplicemente con $N(s)$, possiamo intanto (con analoga convenzione per ω e per $\mathfrak{N}$) scrivere le (4'), (5'), riferite al contorno, sotto la forma

$$\omega(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}N(\sigma-\sigma_1)\chi(\sigma_1)\,d\sigma_1, \tag{4''}$$

$$\omega(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathfrak{N}(\sigma-\sigma_1)\chi(\sigma_1)\,d\sigma_1. \tag{5''}$$

Dal § precedente siamo assicurati della integrabilità dei nuclei $N,\mathfrak{N}$, e della conseguente legittimità degli integrali, come valori al contorno (finiti e continui) di una $\omega(\zeta)$ regolare per $|\zeta|<1$ e nulla per $\zeta=0$. Dall'ipotesi che il dato della questione, cioè la funzione χ, ammetta derivata continua, segue poi subito che la stessa proprietà compete ad $\omega(\sigma)$. Infatti, attesa la periodicità di $N(\sigma-\sigma_1)$ e di $\chi(\sigma_1)$ rapporto ai rispettivi argomenti, si può intanto, assumendo $s=\sigma-\sigma_1$ per variabile di integrazione, attribuire alla (4'') la forma

$$\omega(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}N(s)\chi(\sigma-s)\,ds.$$

Di qua, derivando, come è lecito, sotto il segno e riassumendo a derivazione eseguita $\sigma_1=\sigma-s$ come variabile di integrazione, si ricava

$$(15)\qquad \omega'(\sigma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}N(\sigma-\sigma_1)\chi'(\sigma_1)d\sigma_1,$$

l'apice designando derivazione rispetto all'argomento indicato.

Analoga conclusione sussiste naturalmente per la (5').

Passiamo alla verificazione delle soluzioni trovate, esplicitando i passaggi per la (II) e mostrando che, coi valori al contorno (5″) e (15), essa rimane effettivamente soddisfatta.

Separiamo per ciò il reale dall'immaginario nelle (5″) e (15), e ricaveremo ϑ, τ e loro derivate (si intende al contorno), ottenendo

$$(16)\qquad \vartheta=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}N_1(\sigma-\sigma_1)\chi(\sigma_1)d\sigma,\qquad \tau=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}N_2(\sigma-\sigma_1)\chi(\sigma_1)d\sigma_1,$$

nonchè

$$\vartheta'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}N_1(\sigma-\sigma_1)\chi'(\sigma_1)d\sigma_1,\qquad \tau'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}N_2(\sigma-\sigma_1)\chi'(\sigma_1)d\sigma_1.$$

Operiamo sull'ultima formula, assumendovi per variabile di integrazione $s=\sigma-\sigma_1$, con che essa può essere scritta

$$\begin{aligned}\tau'(s)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}N_2(s)\chi'(\sigma-s)ds\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}N_2(s)\chi'(\sigma-s)ds+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}N_2(s)\chi'(\sigma-s)ds.\end{aligned}$$

Abbiamo visto nel precedente § che $N_2(s)$ è continua in ciascuno dei due intervalli $(-\pi,0)$, $(0,\pi)$ separatamente, e vi ammette derivata, la quale diviene infinita appena logaritmicamente per $s=0$ ed è quindi integrabile in entrambi gli intervalli. Si può perciò integrare per parti, notando che $\chi'(\sigma-s)=-\frac{d}{ds}\chi$; e si avrà

$$\begin{aligned}\tau'(\sigma)=-\frac{1}{\pi}\left[N_2(s)\chi(\sigma-s\right]_{s=-\pi}^{s=0}&-\frac{1}{\pi}\left[N_2(s)\chi(\sigma-s)\right]_{s=0}^{s=\pi}\\&+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}N_2'(s)\chi(\sigma-s)d\sigma.\end{aligned}$$

Nella parte ai limiti i due termini relativi a $s=-\pi$ e a $s=\pi$ si elidono per la periodicità di N_2 e di χ; gli altri due (che si eliderebbero anch'essi se N_2 fosse continua) si riducono, con notazione evidente, a

$$\chi(\sigma)\frac{1}{\pi}\{N_2(+0)-N_2(-0)\},$$

ossia, in virtù della (13) (in cui A_2 e N_2^* designano funzioni continue), a $\chi(\sigma)$. Rimane quindi

$$\tau'(\sigma) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} N_2'(s)\chi(\sigma - s)ds + \chi(\sigma).$$

Dalla prima delle (16) si ha

$$p\vartheta(\sigma) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} pN_1(s)\chi(\sigma - s)ds,$$

donde, per sottrazione,

$$\tau'(\sigma) - p\vartheta(\sigma) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{N_2'(s) - pN_1(s)\}\chi(\sigma - s)ds + \chi(\sigma).$$

Siccome, per la (10′), il fattore di $\chi(\sigma - s)$ sotto il segno integrale si riduce ad $\frac{1}{2}$, così l'integrale stesso si annulla (per l'ipotesi che χ sia a valor medio nullo), e rimane la (II).

La verificazione della (III) si fa in modo del tutto analogo, sfruttando in fine la (14′).

7. Casi particolari notevoli.

Se la χ è funzione pari $[\chi(-\sigma) = \chi(\sigma)]$, ovvero dispari $[\chi(-\sigma) = -\chi(\sigma)]$, la stessa proprietà compete a ϑ, e l'opposta a τ, cioè $\tau(\sigma)$ è dispari nel primo caso e pari nel secondo: sia che si tratti della equazione (II) che della (III). La dimostrazione segue materialmente dalle espressioni (16) di ϑ e τ, o dalle analoghe che si avrebbero per la equazione (III) (scambiando N in $\mathfrak{N}$): basta tener conto che N_1 è pari e N_2 dispari, e analogamente $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$. Tale comportamento si desume ovviamente dalle definizioni (6), (7) di $N(z)$, $\mathfrak{N}(z)$ le quali mostrano che entrambe queste funzioni sono reali sull'asse reale. Perciò, in punti simmetrici rispetto a tale asse, N_1 assume valori eguali, N_2 valori opposti, il che implica appunto N_1 pari e N_2 dispari su C; lo stesso per $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$.

Fissiamo l'attenzione sull'ipotesi (la quale si troverà verificata nella applicazione dei §§ seguenti) che $\chi(\sigma)$ sia dispari. Risultano, come s'è detto, $\tau(\sigma)$ pari e $\vartheta(\sigma)$ dispari, il che si può sintetizzare dicendo che la funzione di variabile complessa $i\omega = i\vartheta - \tau$ prende, sul contorno C, valori coniugati in punti simmetrici rispetto all'asse reale. Dal contorno la proprietà si trasporta notoriamente all'intero campo; così *$i\omega$ risulta reale, e quindi $\vartheta = 0$, sull'asse reale.* A questa conclusione — sia detto per incidenza — si perviene ovviamente anche partendo dallo sviluppo (3) di $\chi(\sigma)$. Per la disparità, ogni $h_n = 0$. La (4), o rispettivamente la (5), mostra allora che $i\omega$ è reale per ζ reale.

8. Disuguaglianze fondamentali.

In base alle espressioni (6′) e (7′) di N, $\mathfrak{N}$, risultano integrabili su C anche i valori assoluti, $|N|$, $|\mathfrak{N}|$.

Designeremo con L il valore numerico dell'integrale $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|N|\,ds$, ovvero, per p intero, dell'analogo $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\mathfrak{N}|\,ds$. Con ciò questa costante positiva L viene a dipendere esclusivamente dal parametro p; non si può dire che abbia limite superiore finito al variare di p, ma è ben determinata e finita in corrispondenza a qualsiasi valore di p (intero o no).

Ferme restando per la funzione data χ le ipotesi del § 4, indichiamo con M ed M' i massimi dei valori assoluti di $\chi(\sigma)$ e di $\chi'(\sigma)$. Dalle (4″), (15) [ovvero dalle analoghe per p intero] ricaviamo immediatamente le disuguaglianze

$$(17)\qquad |\omega(\sigma)| \leqq LM, \qquad |\omega'(\sigma)| \leqq LM',$$

che valgono così tanto per la (II) quanto per la (III).

9. Limitazioni concernenti $P(\vartheta, \tau)$ e sue derivate.

La funzione $P(\vartheta, \tau)$ definita dalla (1) è regolare per qualsiasi valore finito di ϑ, τ. Perciò, se $\Delta\vartheta$, $\Delta\tau$ designano degli incrementi arbitrari di queste quantità, e ΔP è l'incremento corrispondente di P, si ha

$$\Delta P = \overline{\frac{\partial P}{\partial \vartheta}}\,\Delta\vartheta + \overline{\frac{\partial P}{\partial \tau}}\,\Delta\tau,$$

il tratto sovrapposto indicando che la funzione va riferita ad argomenti del tipo $\vartheta + t\Delta\vartheta$, $\tau + t\Delta\tau$ con t compreso fra 0 ed 1.

Compendiamo per brevità $\vartheta + i\tau$ in ω, $\Delta\vartheta + i\Delta\tau$ in $\Delta\omega$, e supponiamo

$$(18)\qquad |\omega| + |\Delta\omega| \leqq \Omega,$$

con che anche $|\omega|$, $|\Delta\omega|$, $|\vartheta|$, $|\tau|$, $|\Delta\vartheta|$, $|\Delta\tau|$ sottostanno tutti alla stessa limitazione, sono cioè $\leqq \Omega$.

D'altra parte

$$\begin{cases} P(\vartheta, \tau) = p(e^{-3\tau}\sin\vartheta - \vartheta), \\ \dfrac{\partial P}{\partial \vartheta} = p(e^{-3\tau}\cos\vartheta - 1), \qquad \dfrac{\partial P}{\partial \tau} = -\,3\,pe^{-3\tau}\sin\vartheta \end{cases}$$

sono sviluppabili in serie di potenze di ϑ e di τ, convergenti per tutti i valori di questi argomenti; e le tre serie ammettono ordinatamente le maggioranti

$$p\{e^{3\tau}S\vartheta - \vartheta\}, \qquad p\{e^{3\tau}C\vartheta - 1\}, \qquad 3\,pe^{3\tau}S\vartheta,$$

S e C designando seno e coseno iperbolico.

Per valori degli argomenti ϑ, τ non superiori ad Ω in modulo, si avrà in conformità

$$\begin{cases} |P| \leqq p\{e^{2\Omega} S\Omega - \Omega\}, \\ \left|\frac{\partial P}{\partial \vartheta}\right| \leqq p\{e^{2\Omega} C\Omega - 1\}, \qquad \left|\frac{\partial P}{\partial \tau}\right| \leqq 3pe^{2\Omega} S\Omega, \end{cases}$$

le quali, ove si introduca la trascendente intera

$$G(\Omega) = p\{e^{2\Omega} S\Omega - \Omega\}, \tag{19}$$

danno luogo alle disuguaglianze

$$\begin{cases} |P| \leqq G(\Omega), \\ \left|\frac{\partial P}{\partial \vartheta}\right| + \left|\frac{\partial P}{\partial \tau}\right| \leqq G'(\Omega). \end{cases} \tag{20}$$

Notiamo che, nell'ipotesi (18), argomenti del tipo $\vartheta + t\Delta\vartheta$, $\tau + t\Delta\tau$ sono certo non superiori ad Ω in valore assoluto, mentre, in ogni caso, $|\Delta\vartheta| \leqq |\Delta\omega|$, $|\Delta\tau| \leqq |\Delta\omega|$. Perciò dalla precedente espressione di ΔP discende subito la importante disuguaglianza

$$|\Delta P| \leqq G'(\Omega)|\Delta\omega|. \tag{21}$$

Accanto a questa occorre stabilirne una analoga relativa a $P' = \frac{dP}{d\sigma}$: si intende che ci si riferisce al contorno C, pensando ϑ, τ, come pure $\Delta\omega = \Delta\vartheta + i\Delta\tau$, quali funzioni di σ (continue assieme alle loro derivate), con che

$$P' = \frac{\partial P}{\partial \vartheta}\vartheta' + \frac{\partial P}{\partial \tau}\tau',$$

e $\Delta P'$ rappresenta l'incremento dovuto al fatto che ϑ, τ, ϑ', τ' subiscono gli incrementi definiti da $\Delta\omega$, $\Delta\omega'$.

Ammesso che anche $|\omega'|$ e $|\Delta\omega'|$ soddisfacciano ad una disuguaglianza analoga alla (18), anzi alla

$$|\omega'| + |\Delta\omega'| \leqq \Omega, \tag{18'}$$

colla stessa costante positiva nel secondo membro, si trova agevolmente

$$|\Delta P'| \leqq G'(\Omega)|\Delta\omega'| + G''(\Omega)\,\Omega\,|\Delta\omega| . \tag{21'}$$

Ci apparirà più innanzi essenziale la circostanza che la maggiorante $G(\Omega)$ si annulla di secondo ordine per $\Omega = 0$, e quindi G' di prim'ordine. Questo è reso possibile dall'essere P di secondo ordine almeno nei due argomenti ϑ e τ. Ecco perchè abbiamo fin da principio attribuito alla (I) la forma (I') apparentemente meno semplice.

10. Equazione funzionale più generale della (I′) — Algoritmo di approssimazioni successive — Sua illimitata applicabilità.

Introduciamo, per brevità di scrittura, un operatore funzionale $A\omega$, lineare, ma *non* monogeno, ponendo, sul contorno C:

$$(22)\qquad A\omega = \begin{cases} \tau'(\sigma) - p\vartheta(\sigma), & \text{per } p \text{ non intero} \\ \tau'(\sigma) - p\vartheta(\sigma) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dot{\vartheta}(\sigma_1)\cos(\sigma-\sigma_1)\,d\sigma_1, & \text{per } p \text{ intero.} \end{cases}$$

Si consideri l'equazione funzionale

$$(\mathrm{IV})\qquad A\omega = P(\vartheta, \tau) + \chi(\sigma),$$

in cui $\chi(\sigma)$ designa una funzione ***dispari***, nota e soddisfacente alle altre condizioni specificate a § 4. Tale equazione funzionale è, per p non intero, alquanto più generale della (I), riducendosi alla (I′) per $\chi(\sigma) = 0$.

Cerchiamo di integrare la (IV) per approssimazioni successive, assumendo come approssimazione iniziale $\omega_0 = \vartheta_0 + i\tau_0$ la soluzione dell'equazione *lineare*

$$(23)\qquad A\omega_0 = \chi(\sigma),$$

che è poi la (IV) stessa in cui si trascuri il termine $P(\vartheta, \tau)$ d'ordine superiore al primo.

Per quanto fu esposto nei §§ 6 e 7 a proposito delle equazioni (II) e (III), siamo assicurati che la (23) definisce effettivamente in modo univoco una funzione $\omega_0(\zeta)$ regolare per $|\zeta| < 1$, nulla nell'origine, continua assieme alla sua derivata prima su C, e ***simmetrica***, volendo dire brevemente con tale qualifica che $i\,\omega_0$ è reale per ζ reale, ossia che ϑ_0 è dispari e τ_0 pari.

Risulterà in conformità dispari, e quindi in particolare di valor medio nullo, anche la funzione

$$P(\vartheta_0, \tau_0) = p(e^{-3\tau_0}\sin\vartheta_0 - \vartheta_0),$$

nonchè

$$\chi_1(\sigma) = P(\vartheta_0, \tau_0) + \chi(\sigma).$$

Passeremo ad una seconda approssimazione ω_1, in base alla equazione lineare

$$A\omega_1 = \chi_1(\sigma)$$

da cui rimane appunto individuata una funzione ω_1 che si comporta come ω_0, compresa la proprietà di simmetria.

A partire da ω_1 si trae in modo analogo una ulteriore approssimazione ω_2, ecc. In generale, supposto che si siano così conseguite $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\nu-1} = \vartheta_{\nu-1} + i\tau_{\nu-1}$, si pone

$$(24)\qquad \chi_\nu(\sigma) = P(\vartheta_{\nu-1}, \tau_{\nu-1}) + \chi(\sigma),$$

con che χ_ν risulta sempre dispari, e si ricava ω_ν dalla equazione lineare

$$A\,\omega_\nu = \chi_\nu(\sigma) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{25}$$

L'algoritmo costruttivo delle ω è, come si vede, iterabile indefinitamente. Resta da far vedere che esso converge realmente verso una funzione ω che soddisfa alla (IV) e alle altre condizioni volute.

11. Correzioni successive — Convergenza uniforme delle ω_ν, ω'_ν verso una funzione limite ω e sua derivata — Verificazione della equazione funzionale.

Definiamo le *correzioni successive*

$$w_\nu = \omega_\nu - \omega_{\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots), \tag{26}$$

le quali, nei riguardi qualitativi, si comportano manifestamente come le ω, e danno luogo alle identità

$$\omega_\nu = \omega_0 + \sum_{1}^{\nu}{}_j\, w_j \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{27}$$

Le disuguaglianze stabilite nei §§ 8 e 9 ci porteranno a riconoscere che le serie $\sum_1^\infty{}_j\, w_j$, $\sum_1^\infty{}_j\, w'_j$ sono entrambe uniformemente convergenti su C, purchè soltanto sieno abbastanza piccoli i limiti superiori M, M' di $|\chi(\sigma)|, |\chi'(\sigma)|$.

All'uopo cominciamo col rilevare che dalle (23) e (17) scende

$$|\omega_0| \leqq \mu, \qquad |\omega'_0| \leqq \mu, \tag{28}$$

indicando per brevità con μ *il maggiore dei due numeri* LM, LM'.

Dalle stesse (23), combinate colle (25), (26), si ha poi

$$A w_1 = P(\vartheta_0, \tau_0), \tag{29}$$

$$A w_\nu = P(\vartheta_{\nu-1}, \tau_{\nu-1}) - P(\vartheta_{\nu-2}, \tau_{\nu-2}) \quad (\nu = 2, 3, \ldots). \tag{30}$$

Il secondo membro della (29) è una funzione di σ continua assieme alla sua derivata $P' = \frac{\partial P}{\partial \vartheta_0}\vartheta'_0 + \frac{\partial P}{\partial \tau_0}\tau'_0$. Dalle (21) e (28) seguono subito le limitazioni

$$|P(\vartheta_0, \tau_0)| \leqq G(\mu), \qquad |P'| \leqq G'(\mu)\mu.$$

Dato che $G(\mu)$ è rappresentata da una serie (senza termine costante) a coefficienti tutti positivi, si ha necessariamente $G(\mu) \leqq G'(\mu)\mu$, sicchè potremo a fortiori ritenere

$$|P(\vartheta_0, \tau_0)| \leqq G'(\mu)\mu.$$

Con queste limitazioni per il secondo membro della (29) e sua derivata, possiamo

applicare alla funzione w_1, definita dalla (29), le disuguaglianze corrispondenti alle (17) ottenendo

$$(31)\qquad |w_1| \leq L\,G'(\mu)\,\mu, \qquad |w_1'| \leq L\,G'(\mu)\,\mu.$$

Poniamo

$$(32)\qquad \begin{cases} \Omega_\nu = |\omega_0| + |w_1| + |w_2| + \ldots + |w_\nu|, \\ \Omega_\nu' = |\omega_0'| + |w_1'| + |w_2'| + \ldots + |w_\nu'| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

e, fissando per un momento l'attenzione sopra un valore determinato n dell'indice ν, indichiamo con Ω un numero non inferiore al massimo di

$$\begin{gathered} \mu,\ \Omega_1,\ \Omega_2, \ldots, \Omega_{n-1}, \\ \Omega_1',\ \Omega_2', \ldots, \Omega_{n-1}'. \end{gathered}$$

Cerchiamo quali limitazioni si può trarne per le $|w_j|$, $|w_j'|$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ e per Ω_n, Ω_n'.

Abbiamo intanto, dalle (27) e dalla definizione di Ω,

$$|\omega_{\nu-2}| \leqq \Omega, \qquad |\omega_{\nu-1}| \leqq \Omega,$$

nonchè

$$|\omega_{\nu-2}'| \leqq \Omega, \qquad |\omega_{\nu-1}'| \leqq \Omega \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n).$$

Con ciò al secondo membro delle (30), che è un ΔP, si può applicare la disuguaglianza (21) del § 9, e si ha

$$|\Delta P| = |P(\vartheta_{\nu-1}, \tau_{\nu-1}) - P(\vartheta_{\nu-2}, \tau_{\nu-2})| \leqq G'(\Omega)\,|w_{\nu-1}|.$$

Alla derivata $\frac{d\Delta P}{d\sigma} = \Delta P'$ si può applicare in conformità la (21'), ottenendo

$$|\Delta P'| \leqq G'(\Omega)\,|w_{\nu-1}'| + G''(\Omega)\,\Omega\,|w_{\nu-1}|.$$

La (17) dà allora

$$(33)\qquad \begin{cases} |w_\nu| \leqq L\,G'(\Omega)\,|w_{\nu-1}| \\ |w_\nu'| \leqq L\{G'(\Omega)\,|w_{\nu-1}'| + G''(\Omega)\,\Omega\,|w_{\nu-1}|\} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n). \end{cases}$$

Poniamo

$$(34)\qquad q = G'(2\,\Omega)$$

e notiamo che, per essere $G'(\Omega)$ una serie di potenze a coefficienti tutti positivi (convergente per qualsiasi Ω), si ha $G'(2\,\Omega) \geqq G'(\Omega)$, ed anche

$$G'(2\,\Omega) \geqq G'(\Omega) + G''(\Omega)\,\Omega,$$

come si può verificare paragonando lo sviluppo dei due membri, cioè i valori delle derivate di un ordine qualsiasi k per $\Omega = 0$.

Tenuto conto di ciò, segue immediatamente dalle (33) che, ove sia

$$(35)\qquad |w_\nu| \leqq \mu q^\nu, \qquad |w_\nu'| \leqq \mu q^\nu$$

per un dato valore dell'indice ν, le disuguaglianze stesse rimangono verificate per il valore di ν immediatamente successivo.

Ora le (35) sono soddisfatte per $\nu = 1$, come risulta dalle (31), notando che

$$LG'(\mu) \leqq LG'(\Omega) \leqq LG'(2\Omega) = q.$$

Esse seguitano dunque a sussistere fino a $\nu = n$, che è, *per ora*, il limite di validità delle (33). Ma tale validità è unicamente subordinata alla circostanza che nessuna delle Ω_ν, Ω'_ν, fino a $\nu = n - 1$, supera Ω. Se si è in grado di constatare che anche Ω_n, Ω'_n risultano $\leqq \Omega$, le (35) e le disuguaglianze

(36) $$\Omega_\nu \leqq \Omega, \qquad \Omega'_\nu \leqq \Omega$$

rimangono acquisite per qualunque ν. In realtà dalle (32), attese le (28) e le (35) (che sussistono come si è rilevato, da $\nu = 1$ fino a $\nu = n$), segue

$$\Omega_n \leqq \mu(1 + q + \ldots + q^n) = \mu \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$
$$\Omega'_n \leqq \mu \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Evidentemente, se

(37) $$q < 1,$$

(38) $$\frac{\mu}{1 - q} \leqq \Omega,$$

Ω_n, Ω_n risultano $\leqq \Omega$; e la illimitata validità delle (35) associata a $q < 1$ garantisce la assoluta e uniforme convergenza delle serie

$$\omega_0 + \sum_1^\infty{}_j w_j, \qquad \omega'_0 + \sum_1^\infty{}_j w'_j.$$

La prima serie definisce perciò una funzione $\omega(\sigma) = \vartheta + i\tau$, continua assieme alla sua derivata ω', che è somma della seconda serie. Ciò val quanto dire, in base alle (27), che si ha, uniformemente su C,

(39) $$\lim_{\nu \to \infty} \omega_\nu = \omega, \qquad \lim_{\nu \to \infty} \omega'_\nu = \omega'.$$

Ne risulta, pure uniformemente,

$$\lim_{\nu \to \infty} A\omega_\nu = A\omega,$$
$$\lim_{\nu \to \infty} P(\vartheta_\nu, \tau_\nu) = P(\vartheta, \tau),$$

con che, dalle (24) e (25), passando al limite per $\nu \to \infty$, si ricava

$$A\omega = P(\vartheta, \tau) + \chi(\sigma).$$

Perciò la ω, definita dall'algoritmo (25), è veramente integrale della (IV) con tutti i requisiti voluti.

12. Discussione delle condizioni sufficienti per la convergenza. — Conseguente apprezzamento numerico.

Per quanto precede, la convergenza del nostro procedimento di approssimazioni successive è assicurata, purchè sussistano le due disuguaglianze

$$(37) \qquad q < 1,$$

$$(38) \qquad \frac{\mu}{1-q} \leqq \Omega,$$

con

$$(34) \qquad q = LG'(2\Omega)$$

e μ dipendente dai dati della questione come il maggiore dei due numeri LM, LM' [M, M' massimi di $\chi(\sigma), \chi'(\sigma)$].

Mostriamo che *a tutte queste condizioni si soddisfa purchè soltanto sia abbastanza piccolo μ, il che vuol dire M ed M'.*

All'uopo cominciamo coll'osservare che, per ottemperare alla (38) rimpicciolendo μ quanto meno è possibile, dovremo intanto assumere la (38) stessa sotto la forma limite

$$(38') \qquad \mu = \Omega(1-q).$$

D'altra parte $q = LG'(2\Omega)$ si annulla per $\Omega = 0$ e va poi sempre crescendo con Ω finchè arriva al valore 1 in corrispondenza a un certo $\Omega = U$. I valori di Ω che possono legittimamente servire nei ragionamenti del § precedente (come presunte limitazioni delle Ω_ν, Ω'_ν) sono a priori tutti e soli quelli compresi fra 0 ed U (che rendono $0 < q < 1$). Il più conveniente tra questi, cioè quello che imporrà la minima restrizione a μ, sarà, in base alla (38'), quello che ne rende massimo il secondo membro

$$\Omega(1-q) = \Omega\{1 - LG'(2\Omega)\}.$$

Questo secondo membro si annulla per $\Omega = 0$, nonchè per $\Omega = U$ ($q = 1$), rimanendo positivo nel frapposto intervallo. Esso vi ammette perciò un massimo $\bar{\mu}$ (ed uno soltanto, come si verifica immediatamente) in corrispondenza ad un valore intermedio $\bar{\Omega}$ dell'argomento.

Riassumendo, si calcolerà il valore numerico $\bar{\Omega}$ di Ω, che rende massimo $\Omega\{1 - LG'(2\Omega)\}$, e questo massimo μ [i quali dipendono esclusivamente da L, e quindi (§ 38) da p]. *La condizione sufficiente per la validità del procedimento si può allora presentare sotto la forma esplicita*

$$\mu \leqq \bar{\mu},$$

rimanendo altresì assicurate, per la soluzione ω che esso determina, le limitazioni

$$|\omega| \leqq \bar{\Omega}, \qquad |\dot{\omega}'| \leqq \bar{\Omega}.$$

Un apprezzamento numerico (un po' sbrigativo, ma comunque istruttivo) si ottiene trascurando nella serie $G(\Omega)$ le potenze superiori alla seconda. La (19), cioè

$$G(\Omega) = p\{e^{3\Omega} L\Omega - \Omega\},$$

si riduce allora a

$$G(\Omega) = 3p\Omega^2,$$

e dà quindi

$$LG'(2\Omega) = 12Lp\Omega.$$

Il massimo $\bar{\mu}$ di

$$\Omega(1 - 12Lp\Omega)$$

si ha così per

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{24Lp},$$

ed è

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2}\bar{\Omega} = \frac{1}{48Lp}.$$

Il valore limite U di Ω (quello che rende $q = 1$) è invece

$$U = 2\bar{\Omega}.$$

13. Unicità della soluzione fornita dal metodo di approssimazioni successive.

Vogliamo far vedere che ogni soluzione $\omega^* = \vartheta^* + i\tau^*$ della (IV), continua assieme alla sua derivata prima su C, nulla nel centro, cioè a valor medio nullo su C, e soddisfacente ad una limitazione

$$|\omega^*| \leqq \Omega,$$

che valga anche per la ω definita col procedimento delle approssimazioni successive, coincide necessariamente con questa.

Vi perverremo senza difficoltà considerando le differenze

$$w_\nu^* = \omega^* - \omega_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{40}$$

fra la ω^* di cui si tratta e le approssimazioni successive ω_ν introdotte a § 10, e constatando che tali differenze convergono a zero per $\nu \to \infty$.

Intanto conviene rilevare che ω_ν verifica, per definizione, la condizione al contorno (25)

$$A\omega_\nu = \chi_\nu(\sigma) = P(\vartheta_{\nu-1}, \tau_{\nu-1}) + \chi(\sigma) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

e ω^*, per ipotesi, la (IV):

$$A\omega^* = P(\vartheta^*, \tau^*) + \chi(\sigma).$$

$P(\vartheta^*, \tau^*)$ è naturalmente, al pari di $\chi(\sigma)$, funzione continua di σ, assieme alla sua derivata prima, ed ha inoltre valore medio nullo, tale proprietà comdetendo a $\chi(\sigma)$, ω^* e quindi anche ad $A\omega^* - \chi(\sigma)$. Per analoga ragione, o

anche più specificamente (§ 10) perchè funzione dispari, ha valore medio nullo $P(\vartheta_\nu, \tau_\nu)$.

Si ha così, badando alla (40),

$$A w_\nu^* = P(\vartheta^*, \tau^*) - P(\vartheta_\nu, \tau_\nu).$$

pure con valore medio nullo del secondo membro (in quanto lo si consideri come funzione di σ). Sussistono pertanto le condizioni sotto cui è legittimo dedurne per $|w_\nu^*|$ la limitazione corrispondente alla prima delle (17).

Tenuto presente che il secondo membro in discorso è un ΔP, e che, dalle disuguaglianze

$$|\omega^*| \leqq \Omega, \quad |\omega_\nu| \leqq \Omega,$$

segue

$$|\omega^*| + |\omega_\nu| \leqq 2\Omega,$$

con ovvia modificazione delle considerazioni istituite al § 9, si trova

$$|\Delta P| \leqq G'(2\Omega)\,|w_{\nu-1}^*|,$$

quindi, in base alla (17),

$$|w_\nu^*| \leqq LG\,(2\Omega)\,|w_{\nu-1}^*|,$$

ossia, per la (34),

$$|w_\nu^*| \leqq q\,|w_{\nu-1}^*| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Questa ci mostra che le $|w_\nu^*|$ decrescono anche più rapidamente dei termini di una progressione geometrica di ragione $q < 1$. Dunque

$$\lim_{\nu \to \infty} w_\nu = 0, \qquad \text{c. d. d.}$$

14. Corollario — Sua portata idrodinamica — Validità rigorosa dell'equazione di Airy.

Abbiamo già notato a § 3 che l'equazione funzionale (II)

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - p\vartheta = \chi(\sigma)$$

ammette tutti e soli i valori interi di p per autovalori; ossia che, per p non intero, l'equazione omogenea

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - p\vartheta = 0$$

non ammette soluzioni diverse da zero. Siccome, per p non intero, l'operatore $A\,\omega$ definito dalla (22) è proprio $\frac{d\tau}{d\sigma} - p\,\vartheta$, così

$$A\,\omega_0 = 0$$

implica $\omega_0 = 0$. La stessa conclusione è vera per A $\left(\text{non per } \frac{d\tau}{d\sigma} - p\vartheta\right)$, anche se p è intero, in quanto appunto la corrispondente definizione (22) di A

introduce un termine addizionale che toglie all'intero p il carattere di autovalore.

Ciò premesso, è chiaro che *per* $\chi(o)=0$, *la soluzione della equazione* (IV) *definita dalle approssimazioni successive è zero.* Infatti la (23) dà in primo luogo $\omega_0=0$, e allora, in virtù delle (24) (fattovi $\chi=0$) e delle (25), si annullano tutte le ω_ν e quindi anche il limite ω. Questo ci consente di affermare (con riferimento al precedente §) che *a prescindere da* $\omega=0$, *non esistono soluzioni* (regolari e inferiori ad un certo limite) *dell'equazione*

$$A\,\omega = P(\vartheta, \tau).$$

Per p non intero, questa coincide colla (I'); dunque, sempre per p non intero, nemmeno la (I') ha soluzioni diverse da zero.

Dacchè la (I') definisce le onde periodiche (irrotazionali e permanenti) in un canale molto profondo, e il valore assoluto di ω è legato all'altezza dell'onda, si può anche dare a quanto precede la forma espressiva: *Onde periodiche di altezza moderata possono esistere solo in corrispondenza a valori interi di* p. Infatti, per p non intero, si ha necessariamente $\omega=0$, il che vuol dire assenza d'ogni perturbazione ondosa.

Richiamandosi al significato cinematico di p, espresso dalla (2) del § 1,

$$p = \frac{g\lambda}{2\pi c^2},$$

si vede che dei valori interi di p quello che dà l'onda fondamentale (di lunghezza minima) è $p=1$. Per queste onde, si trova quindi esattamente verificata la equazione di Airy

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}.$$

A dire il vero, non abbiamo ancora dimostrata l'effettiva esistenza di dette onde, ma già la conclusione rigorosa che il minimo valore possibile di p è l'unità merita attenzione, perchè diversa da quanto avrebbero lasciato supporre le ricerche di Stokes e di Rayleigh. Secondo il loro procedimento di approssimazioni successive, tostochè si abbandona la linearità, la equazione di Airy si trova sostituita da una relazione più complicata, in cui intervengono, oltre a c e a λ, anche l'altezza dell'onda, coll'effetto generale di aumentare alquanto la velocità coll'altezza, ossia di rendere $p<1$.

Era naturale il pensare che così fosse in natura per onde di ampiezza finita. Risulta invece dalla nostra discussione che un tale comportamento è contingente allo speciale tipo di approssimazione adottata, ma non può comunque riscontrarsi in effettive soluzioni della (I).

15. Risoluzione della (I) in corrispondenza ad un suo autovalore (p intero) — Equazione di Schmidt.

La equazione (I) — o, ciò che è lo stesso, la equivalente (I′) — non ha termine noto. Per p intero (autovalore), si può subordinarla ad altra con termine noto, che rientra nel tipo (22) (§ 10), ed è quindi integrabile per approssimazioni successive. Basta ricorrere ad un artificio dovuto in sostanza ad E. Schmidt.

Limitandoci alle eventuali soluzioni della (I) per cui $\tau(\sigma)$ è pari e $\vartheta(\sigma)$ dispari (*simmetriche*, secondo la denominazione introdotta al § 10), indichiamo con b il coefficiente (incognito) di $\sin p\sigma$ nello sviluppo di Fourier della funzione ϑ. Sarà zero per la disparità il coefficiente di $\cos p\sigma$, e si avrà

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\vartheta(\sigma_1)\cos p(\sigma-\sigma_1)\,d\sigma_1 = b\sin p\sigma. \tag{41}$$

La (I′), aggiungendo membro a membro questa identità, assume la forma

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - p\vartheta(\sigma) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\vartheta(\sigma_1)\cos(\sigma-\sigma_1)\,d\sigma_1 = P(\vartheta,\tau) + b\sin p\sigma. \tag{I''}$$

Riconosciamo in questa la (IV) del § 10, con p intero e

$$\chi(\sigma) = b\sin p\sigma.$$

Trattiamovi per un momento b come un parametro indeterminato. La proposizione esistenziale del § 11 ci assicura che, per $|b|$ abbastanza piccolo, la (I″) ammette una soluzione $\omega(\zeta, b)$ calcolabile col metodo delle successive approssimazioni. Tale soluzione soddisferà a tutti i requisiti voluti; in particolare, risulterà funzione dispari (e continua) su C la sua parte reale $\vartheta(\sigma, b)$. Se il parametro b, lasciato per un momento indeterminato (salvo una limitazione superiore del valore assoluto), si potrà a posteriori identificare col coefficiente di $\sin p\sigma$ nello sviluppo di ϑ, cioè se

$$b = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\vartheta(\sigma, b)\sin p\sigma\,d\sigma, \tag{41'}$$

sussisterà, per la disparità di ϑ, anche la (41), e per conseguenza la funzione trovata come soluzione della (I″) verificherà altresì la originaria (I).

Tutto si trova così ricondotto alla discussione della equazione in termini finiti (41′); a constatare cioè che essa ammette almeno una radice b abbastanza piccola in valore assoluto, cioè contenuta effettivamente nell'ambito di validità del procedimento costruttivo dell'integrale $\omega(\zeta, b)$. Questo procedi-

mento rende subito manifesto che, nello sviluppo di $\vartheta(\sigma, b)$ per potenze di b, il termine lineare vale $b \sin p\sigma$; perciò la equazione (41′) si riduce alla forma

$$b^2 B(b) = 0,$$

con B serie di potenze di b; ossia in definitiva a

$$B(b) = 0.$$

Questa si può chiamare *equazione di Schmidt*, perchè rientra in una categoria da lui segnalata in generale a proposito delle equazioni integrali non lineari.

Riservo ad altro lavoro la effettiva costruzione della $\omega(\zeta, b)$ e la discussione della equazione $B(b) = 0$, con riguardo alle conseguenze idrodinamiche.

(Eingegangen am 5. 9. 1921.)

Über die Lösungen der Differentialgleichungen der Physik.

I. Mitteilung.

Von

R. Courant in Göttingen.

Einleitung.

Die Differentialgleichungen der Physik entspringen aus Variationsproblemen, und nichts erscheint hiernach natürlicher als der Versuch, die Existenz und die Eigenschaften ihrer Lösungen von dem Ansatz des Variationsproblems her zu untersuchen: Gauß, Riemann, Dirichlet, W. Thomson, H. Weber u. a. haben diesen Weg eingeschlagen. Aber nach der scheinbar vernichtenden Kritik, welche Weierstraß an der Schlußweise des Dirichletschen Prinzipes übte, hat man den Variationsansatz verlassen; wenn auch seitdem durch die Arbeiten von Hilbert und anderen daran anschließenden Autoren über die Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ des Potentials bei dieser Differentialgleichung die ursprüngliche Idee des Dirichletschen Prinzipes als Ausgangspunkt für den Existenzbeweis wieder zur Geltung gebracht wurde, und wenn auch Walther Ritz[1]) den Variationsansatz höchst erfolgreich zur numerischen Berechnung der Lösungen handhabte, so ist heute doch in der Hauptsache die Theorie der Integralgleichungen das Mittel der strengen Behandlung; insbesondere gilt dies für das zentrale Problem der *Eigenwerte* und *Eigenfunktionen*, oder physikalisch gesprochen, der *Eigenschwingungen*, welches z. B. in dem typischen Falle der gewöhnlichen Schwingungsgleichung lautet: Es sollen für ein gegebenes Gebiet G diejenigen „Eigenwerte" λ und zugehörigen in G nicht identisch verschwindenden „Eigenfunktionen" u gefunden werden, für welche in G die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \Delta u + \lambda u = 0$$

---

[1]) W. Ritz, Oeuvres Nr. XV, XVI, XVII, insbesondere Crelles Journal **135** (1908), S. 1–61, Ann. der Phys. **28** (1909). S. 737–786.

und am Rande beispielsweise die Randbedingung

$$(2) \qquad u = 0$$

besteht. Dabei ist in der üblichen Bezeichnung Δu der Differentialausdruck

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \ldots,$$

je nachdem das Gebiet G in einem zwei- oder mehrdimensionalen Raume mit den rechtwinkligen Koordinaten $x, y, \ldots$ gelegen ist. Trotz der großen Erfolge, welche man mit der Integralgleichungsmethode bei der Behandlung der Existenzfragen dieses und der analogen Probleme gehabt hat, scheint es mir doch der Natur des Gegenstandes angemessen, wenn man konsequent zum Variationsansatz zurückkehrt; man darf in den Schwierigkeiten, die sich hier darzubieten scheinen, weniger einen Einwurf gegen die Gemäßheit des Ansatzes erblicken als vielmehr eine Aufforderung, die methodischen Hilfsmittel der Analysis so zu ergänzen, daß der Durchführung des so einfachen und überzeugenden klassischen Grundgedankens keine Hindernisse mehr im Wege stehen. In diesem Sinne habe ich in einer früheren Arbeit[2]) die *Eigenwerte* bei den Eigenwertproblemen behandelt mit dem Ergebnis, daß in der Tat der Variationsansatz eine weit vollständigere und dabei einfachere und durchsichtigere Beherrschung der auftretenden Fragen gestattet als die Integralgleichungsmethode. In der vorliegenden Arbeit möchte ich mich der tiefer greifenden Aufgabe zuwenden, dasselbe auch für die *Eigenfunktionen* zu leisten. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, setzen wir uns hier folgendes Ziel: ***Für einen ganz im Endlichen gelegenen endlich vielfach zusammenhängenden Bereich G der xy-Ebene ohne isolierte Grenzpunkte mit rektifizierbaren Randkurven*[3]) *ist die Existenz eines vollständigen orthogonalen Systems*** $u_1, u_2, \ldots$ ***von Eigenfunktionen und der zugehörigen Eigenwerte*** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ***der Differentialgleichung*** (1) ***bei der Randbedingung*** (2) ***nachzuweisen.*** Wir werden diesen Existenzbeweis so erbringen, daß damit auch zugleich das Verfahren zur numerischen Berechnung der Eigenfunktionen im Sinne von W. Ritz legitimiert und in einem wesentlichen Punkte ergänzt wird. Dabei sollen die Entwickelungen so gehalten sein, daß ihre direkte Übertragung auf andere sich selbst adjungierte Differentialgleichungen zweiter

---

[2]) Courant, Math. Zeitschr. 7 (1920), S. 1–57. „Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der math. Physik".

[3]) Die Voraussetzung der Rektifizierbarkeit ist wesentlich weiter als die Voraussetzungen, unter denen bisher die Frage in der Literatur explizite ihre Erledigung gefunden hat; der Leser wird übrigens bemerken, daß selbst diese Voraussetzung außer in § 6 für alle Schlüsse in dieser Arbeit bedeutungslos bleibt.

und höherer Ordnung sowie auf den Fall von mehr als zwei unabhängigen Variablen keine Schwierigkeit mehr macht. In einer folgenden Abhandlung sollen die Eigenschaften der Lösungen, insbesondere ihre Abhängigkeit vom Gebiet, untersucht werden.

Das erste Kapitel beschäftigt sich, nach einigen Vorbemerkungen über lineare Abhängigkeit, mit der Formulierung und vorläufigen Diskussion des Variationsproblems und führt bis zu einem gewissen Abschluß. Im zweiten Kapitel werden eine Reihe methodischer Hilfsbetrachtungen entwickelt, welche zum Teil wegen ihrer sonstigen Anwendbarkeit auch ein selbständiges Interesse verdienen dürften. Im dritten Kapitel wird der Existenzbeweis zu Ende geführt, und im vierten die Frage der numerischen Berechnung untersucht.

Kapitel I.

Das Variationsproblem und seine Minimalfolgen.

§ 1.

Vorbemerkungen und Bezeichnungen.

Es sei Γ eine Randkurve unseres Bereiches G; wenn wir in Γ ein geradliniges Polygon Γ_N von N gleichen Seiten der Länge h einbeschreiben, so wird das Produkt Nh unterhalb einer festen, d. h. von N unabhängigen Schranke bleiben, da es mit zunehmendem N gegen die Länge von Γ konvergiert. Wir denken uns um die Ecken von Γ_N mit dem Radius h die Kreise geschlagen; alle Punkte von G, welche in das Innere eines dieser Kreise fallen, bilden bei hinreichend kleinem h einen Randstreifen S_h, welcher bei abnehmendem h unendlich schmal wird und der andererseits bei fest gegebenem h alle diejenigen Punkte von G in sich enthält, welche von einem Randpunkt des Gebietes G einen Abstand kleiner als eine hinreichend kleine nur von h abhängige Zahl δ haben.

Wir führen, falls die betreffenden Integrale für die Funktionen φ, ψ einen Sinn haben, die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(3) \qquad H_G[\varphi, \psi] = \int\limits_{(G)} \varphi \cdot \psi \, dx\, dy, \qquad H_G[\varphi] = H_G[\varphi, \varphi].$$

$$(4) \qquad D_G[\varphi, \psi] = \int\limits_{(G)} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} dx\, dy, \qquad D_G[\varphi] = D_G[\varphi, \varphi]$$

und kürzen analog ab, wenn andere Integrationsbereiche zugrunde liegen. Wo Mißverständnisse ausgeschlossen sind, schreiben wir gelegentlich statt

$$H_G,\ D_G \quad \text{einfach} \quad H,\ D.$$

Es gelten die Beziehungen

$$(H[\varphi, \psi])^2 \leq H[\varphi] \cdot H[\psi] \tag{5}$$

$$(D[\varphi, \psi])^2 \leq D[\varphi] D[\psi] \tag{6}$$

auf Grund der Schwarzschen Ungleichheit, sowie bei konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_p$ die Gleichungen

$$H\left[\sum_{i=1}^{p} c_i \varphi_i\right] = \sum_{i,j} c_i c_j H[\varphi_i, \varphi_j] \tag{7}$$

$$D\left[\sum_{i=1}^{p} c_i \varphi_i\right] = \sum_{i,j} c_i c_j D[\varphi_i, \varphi_j]. \tag{8}$$

Aus (5), (6), (7), (8) folgt unmittelbar

$$H[\varphi - \varphi^*] \geq (|\sqrt{H[\varphi]}| - |\sqrt{H[\varphi^*]}|)^2 \tag{9}$$

$$D[\varphi - \varphi^*] \geq (|\sqrt{D[\varphi]}| - |\sqrt{D[\varphi^*]}|)^2. \tag{10}$$

Aus der Kleinheit der Integrale $H[\varphi - \varphi^*]$ bzw. $D[\varphi - \varphi^*]$ kann man also unmittelbar auf die Kleinheit der Differenzen $H[\varphi] - H[\varphi^*]$ bzw. $D[\varphi] - D[\varphi^*]$ schließen, wenn man von vornherein die Beschränktheit der Integrale H bzw. D voraussetzt.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich: Ersetzt man in einem Ausdruck der Form (3) oder (4) eine Funktion φ oder beide Funktionen φ, ψ durch Funktionen φ^*, ψ^*, für welche $H[\varphi - \varphi^*]$, $H[\psi - \psi^*]$ bzw. $D[\varphi - \varphi^*]$, $D[\psi - \psi^*]$ hinreichend klein ist, so ändern sich diese Ausdrücke um beliebig wenig, falls H und D beschränkt sind.

§ 2.
Unabhängigkeitsmaß von Funktionen.

Es seien $f_1, f_2, \ldots, f_n$ stetige Funktionen im Gebiete G, es seien ferner $c_1, c_2, \ldots, c_n$ Konstanten, welche der Relation

$$c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 = 1 \tag{11}$$

genügen. Der kleinste Wert m, welchen unter dieser Nebenbedingung der Ausdruck

$$H\left[\sum_{i=1}^{n} c_i f_i\right] = \sum_{i,j} c_i c_j H[f_i, f_j] \tag{12}$$

bei Variation der c_i annehmen kann, heißt das *Unabhängigkeitsmaß* der Funktionen f_i für G. Seine Existenz folgt unmittelbar aus der Definition als Minimum einer definiten quadratischen Form der c_i bei der Nebenbedingung (11). Offenbar ist die Bedingung $m = 0$ notwendig und hin-

reichend für die lineare Abhängigkeit der Funktionen und gleichbedeutend mit dem Verschwinden der sogenannten „*Gramschen Determinante*“:

$$\Delta_G\{f_1, \ldots, f_n\} = \begin{vmatrix} g_{11}, \ldots, g_{1n} \\ g_{21}, \ldots, g_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ g_{n1}, \ldots, g_{nn} \end{vmatrix},$$

wobei

$$g_{ij} = H[f_i, f_j]$$

ist. *Zwischen der Determinante Δ und dem Unabhängigkeitsmaß m besteht folgende wichtige Ungleichheit*

$$\Delta \geqq m^n. \tag{13}$$

Zum Beweise bedenken wir, daß m gemäß seiner Definition die kleinste der — durchweg nicht negativen — Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} g_{11} - \lambda, & g_{12} & , \ldots, & g_{1n} \\ g_{21} & , g_{22} - \lambda, & \ldots, & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & , g_{n2} & , \ldots, & g_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

für λ ist. Da das Produkt der n Wurzeln dieser Gleichung aber gleich Δ ist, so ergibt sich unmittelbar die Behauptung[4]).

Aus der Definition des Unabhängigkeitsmaßes folgt sofort der Satz: *Ist G ein Gebiet, welches das Gebiet G' als Teilgebiet enthält, so ist das Unabhängigkeitsmaß irgendwelcher Funktionen für G nicht kleiner als das Unabhängigkeitsmaß derselben Funktionen für G'.* In der Tat: für jedes Wertsystem der c_i ist $H_G\left[\sum_{i=1}^{n} c_i f_i\right] \geqq H_{G'}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i f_i\right]$, also besteht dieselbe Relation auch für die Minima der beiden Seiten.

Für die Gramschen Determinanten gilt übrigens der entsprechende Satz: *Es ist unter den obigen Voraussetzungen über G und G'*

$$\Delta_G\{f_1, \ldots, f_n\} \geqq \Delta_{G'}\{f_1, \ldots, f_n\}.$$

[4]) Ebenso können wir aus der Kenntnis von m eine *obere* Schranke für Δ entnehmen; indem wir nämlich beachten, daß sämtliche Wurzeln der Gleichung (14) Werte der quadratischen Form (12) sind, ergibt sich

$$\Delta \leqq m \cdot M^{n-1}, \tag{13a}$$

wenn M eine leicht angebbare obere Schranke der Werte von (12) unter der Bedingung (11) bedeutet; wir erkennen also explizite, daß die Gleichungen $m = 0$ und $\Delta = 0$ einander bedingen.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar, wenn man aus den Maximum-Minimumeigenschaften[5]) der Wurzeln der Gleichung (14) und der Beziehung $H_G\left[\sum_{i=1}^{n} c_i f_i\right] \geqq H_{G'}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i f_i\right]$ entnimmt, daß jede der Wurzeln von (14), also auch ihr Produkt sich bei Übergang von G zu G' nicht vergrößert.

§ 3.
Das Variationsproblem.

Es seien $v_1, v_2, \ldots, v_l$ gegebene, in G einschließlich des Randes stetige, im Inneren analytische[6]) *Funktionen. Unter allen Funktionen φ, welche in G stetig und mit stückweise stetigen Ableitungen*[7]) *bis zur zweiten Ordnung versehen sind, welche ferner den Bedingungen*

(15) $$H[\varphi] = 1$$

(16) $$H[\varphi, v_i] = 0 \qquad (i = 1, \ldots, l),$$

sowie der Randbedingung

(17) $$\varphi = 0$$

genügen, soll diejenige gesucht werden, für welche $D[\varphi]$ einen möglichst kleinen Wert erhält.

Wir wollen, was keinerlei Beschränkung der Aufgabe bedeutet, im folgenden voraussetzen, daß die Funktionen v_i den Orthogonalitätsrelationen

(18) $$H[v_i] = 1, \qquad H[v_i, v_j] = 0 \qquad (i \neq j)$$

genügen.

Es wird das Hauptziel der vorliegenden Arbeit sein, die Existenz der Lösung dieses Variationsproblemes, welches wir als ***Problem I*** bezeichnen wollen, nachzuweisen. Von vornherein wissen wir nur, daß unter

---

[5]) Die h-te der nach wachsender Größe geordneten Wurzeln von (14) ist gleich dem größten Werte, welchen das Minimum von (12) annehmen kann, wenn für die c_i außer (11) noch $h-1$ lineare homogene Nebenbedingungen gestellt werden. Vgl. E. Fischer, Monatshefte für Math. und Phys. 16, S. 245; Courant, loc. cit. [2]), S. 19.

[6]) Die Voraussetzung der Analytizität ist nicht wesentlich; sie wird nur aus Bequemlichkeitsgründen gemacht.

[7]) Stückweise stetig soll eine Funktion in G heißen, wenn ihre Stetigkeit im Inneren von G nur an endlich vielen analytischen Linienstücken Unterbrechungen erleiden darf. Es würde übrigens an den Betrachtungen der Arbeit nichts ändern, wenn wir durchweg Stetigkeit der Ableitungen von den Funktionen φ verlangten, da man ohne Schwierigkeit Funktionen mit nur stückweise stetigen Ableitungen derart durch solche mit durchweg stetigen approximieren kann, daß dabei die Bedingungen des Variationsproblemes unverletzt bleiben und auch der Charakter einer Funktionsfolge als Minimalfolge erhalten wird. Vgl. loc. cit. [2]), S. 52 ff.

den gestellten Bedingungen das Integral $D[\varphi]$ eine *untere Grenze d* besitzen muß; ist d diese Grenze, so gilt für jede konkurrenzfähige Funktion

$$D[\varphi] \geqq d, \tag{19}$$

während es andererseits Folgen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ solcher Funktionen gibt, für welche

$$\lim_{h=\infty} D[\varphi_h] = d \tag{20}$$

ist. Eine solche Funktionsfolge heißt gemäß der üblichen Terminologie eine *Minimalfolge*; wie man sich zum Zwecke der numerischen Rechnung Minimalfolgen praktisch verschaffen kann, soll später im IV. Kapitel erörtert werden, während hier nur die von vornherein feststehende Existenz von Minimalfolgen in Betracht kommt.

Für die Funktionen einer Minimalfolge gilt folgende grundlegende Relation:

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} \{D[\varphi_n, \varphi_m] - dH[\varphi_n, \varphi_m]\} = 0. \tag{21}$$

Zum Beweise beachten wir, daß bei beliebigem m und n die Funktionen

$$\varphi = a\varphi_n + b\varphi_m,$$

unter a und b willkürliche Konstante verstanden, den sämtlichen Konkurrenzbedingungen des Variationsproblemes außer (15) genügen, daß daher

$$D[\varphi] \geqq dH[\varphi]$$

gilt. Dies aber bedeutet wegen der Beziehungen (7), (8), (15)

$$a^2 D[\varphi_n] + b^2 D[\varphi_m] + 2ab\, D[\varphi_m, \varphi_n] \geqq d\{a^2 + b^2 + 2ab\, H[\varphi_m, \varphi_n]\}$$

oder

$$2ab\{D[\varphi_n, \varphi_m] - dH[\varphi_n, \varphi_m]\} \geqq a^2(d - D[\varphi_n]) + b^2(d - D[\varphi_m]).$$

Wählen wir hier $a = b = 1$ bzw. $a = -b = 1$, so erkennen wir unmittelbar wegen (20) die Richtigkeit der in (21) ausgesprochenen Behauptung.

Für eine spätere Anwendung (in Kap. IV) merken wir eine Erweiterung des Begriffes der Minimalfolge an: Wir wollen nämlich eine Funktionsfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eine Minimalfolge (im erweiterten Sinne) nennen, wenn bei den obigen Stetigkeitsvoraussetzungen neben der Gleichung (20) und den Randbedingungen (17) für $\varphi = \varphi_n$ die Relationen

$$\lim_{n=\infty} H[\varphi_n] = 1 \tag{15a}$$

$$\lim_{n=\infty} H[\varphi_n, v_i] = 0 \tag{16a}$$

gelten. Auch für eine solche Funktionsfolge bleibt die Gleichung (21) richtig. Man kann nämlich ohne Schwierigkeit die Funktion φ_n durch eine konkurrenzfähige Funktion $\bar{\varphi}_n$ approximieren, so daß

$$\lim_{n=\infty} H[\varphi_n - \bar{\varphi}_n] = 0$$

und ferner für $\varphi = \bar{\varphi}_n$ (15), (16), (19) sowie

$$\lim_{n=\infty} D[\bar{\varphi}_n] = d$$

gilt[*]).

Aus der Relation (21) ergibt sich folgender Satz über Minimalfolgen: *Jede durch lineare Kombination einer festen Anzahl k von Funktionen der gegebenen Minimalfolge gebildete Funktionenfolge*

$$\varphi_n^* = c_{n_1}\varphi_{n_1} + c_{n_2}\varphi_{n_2} + \dots + c_{n_k}\varphi_{n_k},$$

für welche $H[\varphi_n^*] = 1$ *gilt, ist eine neue Minimalfolge, wenn die Koeffizienten* c_{n_j} *absolut beschränkt bleiben und die Indizes* n_j *mit n über alle Grenzen wachsen.*

In der Tat folgt aus (21) unmittelbar $\lim\limits_{n=\infty} D[\varphi_n^*] = d$, während andererseits die Funktionen φ_n^* allen Konkurrenzbedingungen des Variationsproblemes genügen.

§ 4.

Hilfssatz.

Zur weiteren Untersuchung der Minimalfolgen bedienen wir uns der Tatsache, daß uns für ein Quadrat Q der Seitenlänge l die Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ durch die Ausdrücke

$$\frac{1}{4l^2}\cdot \sin\frac{\pi x n}{l} \sin\frac{\pi y m}{l} \qquad (m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

gegeben sind; die zugehörigen Eigenwerte sind die Zahlen

$$\frac{\pi^2}{l^2}(m^2 + n^2).$$

Der Größe nach geordnet wollen wir die Eigenwerte mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, die entsprechenden Eigenfunktionen mit $u_1, u_2, u_3, \dots$ bezeichnen.

Ist s eine auf dem Rande des Quadrates verschwindende Funktion, welche in dem Quadrate stetig ist, stückweise stetige Ableitungen besitzt und für welche das Dirichletsche Integral $D_Q[s]$ über das Quadrat existiert,

[*]) Die Möglichkeit einer solchen Approximation ergibt sich durch ganz analoge Betrachtungen wie die in Anm. [7]) zitierten. Vgl. auch die Betrachtungen in Kap. IV, S. 323, wo die Überlegung durchgeführt wird.

so drückt sich dieses Integral durch die Fourierschen Entwicklungskoeffizienten

$$s_h = \int\limits_{(Q)} s \cdot u_h \, dx\, dy = H_Q[s, u_h]$$

der Funktion s folgendermaßen aus:

$$D_Q[s] = \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_h s_h^2. \tag{22}$$

Der Beweis dieser bekannten Tatsache folgt am einfachsten, indem man auf die partiellen Ableitungen s_x und s_y die Vollständigkeitsrelation in bezug auf das vollständige orthogonale Funktionensystem der u_h anwendet.

Wir stellen jetzt folgendes Variationsproblem auf: Es seien $o', o'', \ldots, o^{(p)}$ p normierte*) orthogonale Funktionen im Quadrat Q, welche sämtlich am Rande verschwinden, in Q stetig sind und stückweise stetige erste Ableitungen besitzen; unter allen solchen Funktionensystemen ist eines gesucht, für welches die Summe der Integrale

$$D[o'] + D[o''] + \ldots + D[o^{(p)}] = \mathfrak{D}[o]$$

möglichst klein wird.

Es gilt nun der folgende Hilfssatz 1: *Das Minimum in dem eben gestellten Variationsprobleme wird angenommen, wenn für die Funktionen $o^{(i)}$ die ersten p Eigenfunktionen von Q oder ein aus ihnen durch eine beliebige orthogonale Substitution hervorgehendes Funktionensystem gewählt wird; der Wert des Minimums ist gleich der Summe der ersten p Eigenwerte, d. h. gleich $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p$.*

Wir bezeichnen die Fourierschen Entwicklungskoeffizienten der Funktionen $o^{(i)}$ mit o_{ij}, $(j = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, p)$, merken die Relationen

$$\sum_{j=1}^{\infty} o_{ij}^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{23}$$

an und bemerken ferner, daß der Wert der Größe $\mathfrak{D}[o]$ sich nicht ändert, wenn wir die Funktionen $o^{(i)}$ irgend einer orthogonalen Substitution unterwerfen; ist nämlich

$$o^{(i)} = \sum_{j=1}^{p} t_{ij}\, \omega^{(j)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

eine solche Substitution, welche die Funktionen $o^{(i)}$ in die orthogonalen Funktionen $\omega^{(i)}$ überführt, so wird wegen (8) und der Orthogonalitätsrelationen zwischen den Koeffizienten t_{ij} offenbar $\mathfrak{D}[o] = \mathfrak{D}[\omega]$.

*) Normiert soll eine Funktion φ heißen, wenn $H[\varphi] = 1$ ist.

Nun können wir die Funktionen $o^{(i)}$ stets einer solchen orthogonalen Transformation unterworfen denken, daß in dem Koeffizientenschema

$$\begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} & \dots & o_{1p} \\ o_{21} & o_{22} & \dots & o_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ o_{p1} & o_{p2} & \dots & o_{pp} \end{pmatrix}$$

alle Größen oberhalb der Diagonale verschwinden[10]); es wird also dann wegen (22)

$$\mathfrak{D}[o] = (\lambda_1 o_{11}^2 + \lambda_2 o_{21}^2 + \lambda_3 o_{31}^2 + \dots) + (\lambda_2 o_{22}^2 + \lambda_3 o_{32}^2 + \dots) + (\lambda_3 o_{33}^2 + \lambda_4 o_{43}^2 + \dots) + \dots .$$

Auf Grund der Relation $\lambda_{h+1} \geqq \lambda_h$ und der Beziehungen (23) ergibt dies unmittelbar

$$\mathfrak{D}[o] \geqq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p .$$

Setzen wir andererseits $o^{(i)} = u_i$, so wird offenbar der Wert

$$\mathfrak{D}[o] = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p$$

gerade erreicht, womit die Behauptung des Hilfssatzes erwiesen ist.

Wir merken noch an, daß die Summe $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p$ den asymptotischen Wert $\frac{2\pi}{l^2} p^2$ besitzt, d. h. daß

$$\lim_{p=\infty} \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p}{p^2} = \frac{2\pi}{l^2}$$

gilt, wie aus elementaren Betrachtungen bekannt ist[11]); es gibt also gewiß eine positive Konstante A derart, daß für alle p

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p \geqq A \cdot p^2 \tag{24}$$

gilt.

[10]) Wir denken uns etwa zunächst o' durch eine lineare Kombination $\omega' = t_{11} o' + t_{12} o'' + \dots + t_{1p} o^{(p)}$ ersetzt, so daß ω' auf $u_2, u_3, \dots, u_p$ orthogonal steht; hiermit sind für die p Koeffizienten t_{1i} $p-1$ homogene Gleichungen gegeben, denen stets genügt werden kann. Sodann wird $\omega'' = t_{21} o' + \dots + t_{2p} o^{(p)}$ so bestimmt, daß ω'' auf ω' und auf $u_3, \dots, u_p$ orthogonal steht, was wiederum durch die stets mögliche Auflösung von $p-1$ homogenen Gleichungen für die p Unbekannten t_{2i} geschieht, usw. Indem wir die Funktionen $\omega^{(i)}$ normiert denken, haben wir das behauptete Ergebnis.

[11]) Vgl. loc. cit. [9]), S. 33.

§ 5.

Die Konvergenzeigenschaften der Minimalfolgen.

Von den Minimalfolgen unseres ursprünglichen Variationsproblemes können wir keinerlei unmittelbare Konvergenzeigenschaften erwarten; hierin liegt die hauptsächliche Schwierigkeit der gestellten Aufgabe. Für die Überwindung dieser Schwierigkeit spielt nun folgender Satz die entscheidende Rolle:

Hauptsatz: *Es gibt zu jeder Minimalfolge* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ *eine ganze positive Zahl* p, *so daß für* $q > p$ *das Unabhängigkeitsmaß von je* q *Funktionen* $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots, \varphi_{n_q}$ *der Folge mit wachsendem* n *gegen Null konvergiert, falls* $\lim\limits_{n=\infty} n_i = \infty$ *ist*[12]).

Die kleinste positive ganze Zahl p, für welche dieser Satz noch besteht, wollen wir die zur Funktionenfolge gehörige *asymptotische Dimensionszahl*[13]) nennen. Wir können dann unseren Satz in der schärferen Form aussprechen: *Die asymptotische Dimensionszahl jeder Minimalfolge liegt unterhalb einer nur von dem Variationsproblem, nicht aber von der speziellen Wahl der Minimalfolge abhängigen Schranke.*

Diese Sätze drücken aus, daß eine hinreichend große Anzahl von Funktionen der Minimalfolge mit genügend großem Index „beinahe" voneinander linear abhängig sind.

Zum Beweise dieser Behauptungen nehmen wir an, die asymptotische Dimensionszahl unserer Minimalfolge sei mindestens gleich der ganzen Zahl ν; dann gibt es also Gruppen von je ν Funktionen $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots, \varphi_{n_\nu}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$), deren Indizes mit n über alle Grenzen wachsen und deren Unabhängigkeitsmaß oberhalb einer festen positiven Schranke α bleibt. Die Funktionen jeder dieser Gruppen sind voneinander linear unabhängig, lassen sich also orthogonalisieren; d. h. es gibt ein System von ν^2 Konstanten t_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, \nu)$, so daß die Funktionen

$$\varphi^*_{n_i} = \sum_{j=1}^{\nu} t_{ij}\varphi_{n_j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{25}$$

zueinander in G orthogonal und normiert sind. Wir behaupten, daß die Koeffizienten t_{ij}, welche ja noch von n abhängen, bei wachsendem n sämtlich beschränkt bleiben. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so sei bei geeignet groß gewähltem n etwa der Koeffizient t_{11} absolut genommen

---

[12]) Die Bezeichnung n_i ist in dieser Arbeit so zu verstehen, daß n_i irgendeine positive ganzzahlige Funktion von n ist.

[13]) Die Bezeichnung Dimensionszahl soll auf die Analogie zu den Verhältnissen bei Folgen von Vektoren in einem endlich-viel-dimensionalen Raume hinweisen.

oberhalb einer beliebig groß gewählten Schranke, und es sei t_{11} absolut genommen nicht kleiner als einer der anderen Koeffizienten t_{ij}.

Indem wir die Gleichung

$$1 = H[\varphi^*_{n_1}] = H\Big[\sum_{j=1}^{\nu} t_{1j}\varphi_{n_j}\Big]$$

durch t_{11}^2 dividieren, erhalten wir eine Relation der Form

$$\varepsilon_n = H\Big[\sum_{j=1}^{\nu} c_j\varphi_{n_j}\Big],$$

wobei die linke Seite mit wachsendem n gegen Null konvergiert, während die Summe $c_1^2 + \ldots + c_\nu^2$ mindestens gleich 1 ist; das aber heißt, die ν Funktionen $\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_\nu}$ besitzen bei hinreichend großem n ein beliebig kleines Unabhängigkeitsmaß, entgegen der Voraussetzung, daß dieses stets oberhalb der festen positiven Schranke α liegen soll. Mithin bleiben die Koeffizienten t_{ij} in den Gleichungen (25) bei wachsendem n beschränkt, und somit folgt durch Anwendung des Satzes aus § 3, daß auch die Funktionen $\varphi^*_{n_j}$, nach wachsenden Indizes n geordnet, eine Minimalfolge des Variationsproblemes bilden, daß also

$$\lim_{n=\infty} D[\varphi^*_{n_j}] = d. \tag{26}$$

Nunmehr betrachten wir folgendes Variationsproblem, das wir der Abkürzung halber mit *Problem II* bezeichnen wollen: Es soll ein System von ν zueinander orthogonalen, im übrigen noch den Bedingungen des ursprünglichen Variationsproblemes genügenden Funktionen $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_\nu^*$ gefunden werden, für welches der Ausdruck

$$\mathfrak{D}[\varphi^*] = D[\varphi_1^*] + \ldots + D[\varphi_\nu^*]$$

möglichst klein wird, wobei die Integrale natürlich über das Gebiet G zu erstrecken sind. Ob ein solches Minimum existiert, muß auch hier dahingestellt bleiben; jedenfalls aber wird der Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi^*]$ eine untere Grenze d_ν besitzen, und es gilt jedenfalls für diese Grenze

$$d_\nu = \nu \cdot d. \tag{27}$$

Um dies letztere einzusehen, bedenken wir, daß die untere Grenze beim Problem II gewiß nicht kleiner sein kann, als die untere Grenze, welche sich ergeben würde, wenn wir im Problem II die Forderung der Orthogonalität der Funktionen φ_i^* aufgeben würden; die so definierte untere Grenze wäre aber offenbar $\nu \cdot d$, und es ist also $d_\nu \geq \nu \cdot d$; andererseits genügen die Funktionsgruppen $\varphi^*_{n_1}, \ldots, \varphi^*_{n_\nu}$ den Bedingungen des Problemes II, und es ist $\lim\limits_{n=\infty} \mathfrak{D}[\varphi^*_n] = \nu \cdot d$; somit folgt unmittelbar die Gleichung (27).

Um für die Zahl ν eine obere Schranke zu erhalten, denken wir das Gebiet G in ein Quadrat Q der Seitenlänge l eingebettet und betrachten für dieses Quadrat das Variationsproblem des § 4, indem wir die dort als p benannte Zahl mit ν identifizieren. Wir bezeichnen dieses Problem als *Problem III*. Das Problem II entsteht aus III, indem wir von den zur Konkurrenz zuzulassenden Funktionen über die Bedingungen des Problemes III hinaus fordern, daß sie in demjenigen Teile von Q, welcher außerhalb G liegt, identisch verschwinden, und außerdem den Bedingungen (16) aus § 3 genügen. Mithin ist die untere Grenze d_ν beim Problem II nicht kleiner als die beim Problem III, d. h. es gilt infolge des Hilfssatzes von § 4

$$d_\nu = \nu \cdot d \geqq \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu,$$

wobei mit λ_h wie in § 4 die Eigenwerte des Quadrates Q bezeichnet werden. Nun ist die Summe $\lambda_1 + \ldots + \lambda_\nu$ gemäß (24) größer als $A\nu^2$, wo A eine positive Konstante ist, also gilt

$$\nu \cdot d \geqq A \cdot \nu^2$$

oder

$$\nu \leqq \frac{d}{A}. \tag{28}$$

Wir haben also für die positive ganze Zahl ν eine obere Schranke, welche überdies nicht mehr von der speziellen Wahl der Minimalfolge des Problemes I abhängt, wie an der Spitze dieses Paragraphen behauptet wurde.

Der hiermit vollständig bewiesene Satz führt uns nun leicht zu folgendem Theorem, auf welchem die weitere Durchführung des Existenzbeweises beruhen wird:

Aus einer Minimalfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *von der Dimensionszahl p lassen sich p Minimalfolgen*

$$\begin{array}{l} \psi_{1_1}, \psi_{2_1}, \psi_{3_1}, \cdots \\ \psi_{1_2}, \psi_{2_2}, \psi_{3_2}, \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \psi_{1_p}, \psi_{2_p}, \psi_{3_p}, \cdots \end{array} \tag{29}$$

herstellen, derart daß die Funktionen ψ_{n_i} $(i = 1, 2, \ldots, p)$ *für jeden Wert von n ein orthogonales Funktionensystem bilden und die Gleichungen*

$$\lim_{\substack{n=\infty\\m=\infty}} H[\psi_{n_i} - \psi_{m_i}] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p), \tag{30}$$

$$\lim_{\substack{n=\infty\\m=\infty}} D[\psi_{n_i} - \psi_{m_i}] = 0 \tag{31}$$

befriedigen.

Mit anderen Worten leistet der Satz eine *Zerspaltung der Minimalfolge der* φ_n in p wesentlich verschiedene Minimalfolgen, deren jede die Dimensionszahl 1 besitzt[13a])

Wir erhalten die Minimalfolgen (29), indem wir von solchen Gruppen

$$\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots, \varphi_{n_p} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

der ursprünglichen Minimalfolge ausgehen, von denen wir nach dem eben Ausgeführten voraussetzen dürfen, daß jede ein System von p normierten orthogonalen Funktionen bildet, d. h. daß die Gleichungen $H[\varphi_{n_i}] = 1$, $H[\varphi_{n_i}, \varphi_{n_j}] = 0$, $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, p)$ gelten. Ohne den Charakter der Minimalfolge zu verändern, dürfen wir die Funktionen jeder Gruppe einer beliebigen orthogonalen Substitution unterwerfen, die wir nunmehr für jedes n geeignet fixieren wollen. Es seien n und m zwei hinreichend große Indizes, $n < m$; dann ist das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_p}, \varphi_{m_h}$ $(h = 1, \ldots, p)$ beliebig klein; es gibt also Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_p, c_{p+1}$ derart, daß $H[c_1\varphi_{n_1} + \ldots + c_p\varphi_{n_p} - c_{p+1}\varphi_{m_h}]$ beliebig klein wird und $c_1^2 + \cdots + c_p^2 + c_{p+1}^2 = 1$ ist, dabei muß c_{p+1} absolut genommen oberhalb einer positiven von m und n unabhängigen Schranke bleiben, weil andernfalls das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_p}$ beliebig klein werden würde, während es doch den Wert 1 hat. Dividieren wir also durch c_{p+1}^2, so ergibt sich, daß der Ausdruck $H[\varphi_{m_h} - a_1\varphi_{n_1} - \ldots - a_p\varphi_{n_p}]$ durch beschränkt bleibende Konstanten a_i bei hinreichend großem m und n beliebig klein gemacht werden kann; am kleinsten übrigens, wenn

$$a_i = H[\varphi_{m_h}, \varphi_{n_i}]$$

genommen wird. Setzen wir

$$\varphi_{n_h}^* = a_1\varphi_{n_1} + a_2\varphi_{n_2} + \cdots + a_p\varphi_{n_p},$$

so folgt also

$$\text{(32)} \qquad \lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} H[\varphi_{n_h}^* - \varphi_{m_h}] = 0 \qquad (h = 1, \ldots, p).$$

Aus der Bemerkung am Schluß von § 1 entnehmen wir daher, daß die Funktionen $\varphi_{n_h}^*$ in den Ausdrücken $H[\varphi_{n_i}^*, \varphi_{n_j}^*]$ bei hinreichend großem

---

[13a]) **Den Sinn dieses Satzes und seines Beweises erfaßt man am besten an der folgenden analogen Tatsache: Sind im dreidimensionalen Raume $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_1', \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_2', \ldots$ unendlich viele Einheitsvektoren durch den Nullpunkt, so daß $\mathfrak{v}_i$ und $\mathfrak{v}_i'$ orthogonal stehen und daß je drei der Vektoren mit hinreichend großen Indizes ein Parallelepiped von beliebig kleinem Volumen definieren, dann lassen sich die Vektoren $\mathfrak{v}_i, \mathfrak{v}_i'$ durch zwei andere orthogonale Vektoren $\mathfrak{u}_i, \mathfrak{u}_i'$ in derselben Ebene ersetzen, welche gegen zwei Grenzlagen $\mathfrak{u}, \mathfrak{u}'$ konvergieren.**

m und n mit beliebig großer Genauigkeit durch die Funktionen φ_{m_i}, φ_{m_j} ersetzt werden dürfen, daß mit anderen Worten wegen der Orthogonalität der p Funktionen φ_{m_h} $(h = 1, \ldots, p)$ auch die p Funktionen $\varphi^*_{n_h}$ wenigstens „angenähert" ein orthogonales Funktionensystem bilden, d. h. daß die Gleichungen

$$\lim_{n=\infty} H[\varphi^*_{n_i}] = 1\,, \quad \lim_{n=\infty} H[\varphi^*_{n_i}, \varphi^*_{n_j}] = 0 \quad (i \neq j;\, i, j = 1, 2, \ldots, p)$$

gelten. Wenn wir also dieses Funktionensystem in der üblichen Weise vollends orthogonalisieren, indem wir ein orthogonales Funktionensystem $\bar\varphi_{n_1}, \bar\varphi_{n_2}, \ldots, \bar\varphi_{n_p}$ einführen, dessen erste Funktion $\bar\varphi_{n_1}$ sich von $\varphi^*_{n_1}$ nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet, dessen zweite $\bar\varphi_{n_2}$ eine lineare Kombination von $\varphi^*_{n_1}$ und $\varphi^*_{n_2}$ ist, usw., so wird die lineare Transformation der Funktionen $\varphi^*_{n_h}$ in die Funktionen $\bar\varphi_{n_h}$ sich von der identischen Transformation bei genügend großen m und n nur beliebig wenig unterscheiden; es gelten somit auch die Gleichungen

$$(33) \qquad \lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} H[\bar\varphi_{n_h} - \varphi_{m_h}] = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, p).$$

Die orthogonale Transformation, welche die p Funktionen φ_{n_h} in die p Funktionen $\bar\varphi_{n_h}$ überführt, wollen wir mit T_{mn} bezeichnen; die Ausübung dieser Transformation, d. h. den Übergang von den φ_{n_h} zu den $\bar\varphi_{n_h}$ könnten wir das „*Ausrichten*" der Funktionen φ_{n_h} nach den Funktionen φ_{m_h} nennen.

Aus einer unendlichen Folge von orthogonalen Transformationen in p Variablen kann man wegen der Beschränktheit der Koeffizienten nach dem Weierstraßschen Häufungsstellensatze stets eine konvergente Teilfolge herausgreifen, d. h. eine Folge, bei der jede Größe des Koeffizientenschemas gegen eine entsprechende Größe im Koeffizientenschema einer „Grenztransformation" konvergiert.

Wir betrachten nun das System folgender orthogonaler Transformationen:

$$\begin{array}{llll}
T_{21} \\
T_{31} & T_{32} \\
T_{41} & T_{42} & T_{43} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
T_{m1} \cdots & T_{mn} \cdots & T_{m\,m-1} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}$$

Durch die Transformationen der h-ten Vertikalreihe werden die Funktionen $\varphi_{h_1}, \varphi_{h_2}, \ldots, \varphi_{h_p}$ hintereinander nach den Funktionen $\varphi_{m_1}, \varphi_{m_2}, \ldots, \varphi_{m_p}$ $(m = h+1,\ h+2, \ldots)$ ausgerichtet. Wir können uns nun nach bekanntem Muster folgendermaßen eine Folge von wachsenden Indizes $s_1, s_2, s_3, \ldots$ ausgewählt denken, so daß mit wachsendem h die Transformationen $T_{s_h l}$ jeder

Vertikalreihe bei festem l gegen eine Grenztransformation T_l konvergieren. Zunächst wählen wir aus den Zahlen 2, 3, 4, ... eine Teilfolge, welche wir mit $(1,1), (2,1), (3,1), \ldots$ bezeichnen wollen, so aus, daß für $\mu_h = (h, 1)$ die Transformationen $T_{\mu_h 1}$ bei wachsendem h gegen eine Grenztransformation T_1 konvergieren; sodann wählen wir aus den Zahlen $(1,1), (2,1), (3,1), \ldots$ eine Teilfolge, die wir mit $(1,2), (2,2), \ldots$ bezeichnen, so aus, daß auch die Transformationen $T_{\mu_h 2}$ für $\mu_h = (h, 2)$ bei wachsendem h gegen eine Grenztransformation T_2 konvergieren, und fahren so fort. Setzen wir nun $s_h = (h, h)$, so konvergieren offenbar die Transformationen $T_{s_h l}$ für jeden Wert von l gegen die betreffende Transformation T_l.

Indem wir nun die Funktionen $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots, \varphi_{n_p}$ unserer ursprünglichen Minimalfolge der orthogonalen Transformation T_n unterwerfen, gelangen wir zu Funktionen, die wir mit $\psi_{n_1}, \psi_{n_2}, \ldots, \psi_{n_p}$ bezeichnen wollen und von denen wir behaupten, daß sie die in den Gleichungen (30), (31) ausgesprochenen Konvergenzeigenschaften besitzen. In der Tat folgt dies leicht aus Gleichung (33); denn die Funktionen $\bar{\varphi}_{n_h}$, welche noch von dem Index m abhängen, da sie aus den φ_{n_h} durch Anwendung der Transformation T_{mn} entstehen, konvergieren offenbar gegen die Funktionen ψ_{n_h}, wenn m die Werte $s_1, s_2, \ldots$ durchläuft; also gilt auch

$$(34) \qquad \lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} H[\psi_{n_h} - \varphi_{m_h}] = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

wobei wieder m auf die Werte s_j beschränkt bleibt, während für n außer der durchweg gemachten Bedingung $n < m$ keinerlei Beschränkung gefordert wird. Sind nun n und r zwei hinreichend große Indizes, $t = s_j$ ebenfalls ein hinreichend großer Index, $t > n$, $t > r$, so wird $H[\psi_{n_h} - \varphi_{t_h}]$ und $H[\psi_{r_h} - \varphi_{t_h}]$ beliebig klein, und hieraus folgt in der üblichen Weise nach § 1, daß auch $H[\psi_{r_h} - \psi_{n_h}]$ beliebig klein wird, womit die Gleichung (30) des behaupteten Theoremes bewiesen ist.

Um die Gleichung (31) zu beweisen, beachten wir, daß die Funktionen ψ_{n_h} eine Minimalfolge bilden, daß also nach dem Satze von § 3

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} D[\psi_{n_h} - \psi_{m_h}] &= \lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} \{D[\psi_{n_h}] + D[\psi_{m_h}] - 2D[\psi_{m_h}, \psi_{n_h}]\} \\ &= d \cdot \lim_{\substack{n=\infty \\ m=\infty}} H[\psi_{n_h} - \psi_{m_h}] = 0 \end{aligned}$$

wird.

Die Resultate der vorangehenden Betrachtungen, welche wohl schon an sich ein gewisses Interesse besitzen, setzen uns nun instand, den Existenzbeweis vollständig durchzuführen und darüber hinaus tiefer in die Eigenschaften der Eigenfunktionen einzudringen. Wir werden das Ziel des Existenzbeweises erreichen, indem wir an Stelle der bisher betrachteten

beliebigen Minimalfolgen besondere Minimalfolgen konstruieren, welche in G abschnittsweise Differentialgleichungen vom Typus (1) genügen und durch Benutzung dieses Umstandes gestatten, aus den Relationen (30), (31) die Konvergenz der Funktionen der Minimalfolge und ihrer Ableitungen selbst zu beweisen; von der Grenzfunktion wird sich dann herausstellen, daß sie die gesuchte Lösung unseres Variationsproblemes ist.

Um den Beweis ohne Unterbrechungen durchführen zu können, wollen wir im nächsten Abschnitt eine Reihe von Hilfsbetrachtungen voranschicken.

Kapitel II.

Hilfsbetrachtungen.

§ 6.

Hilfssätze über die Integrale D und H.

Wir formulieren zunächst die Greensche Formel der gewöhnlichen Potentialtheorie in folgender, die üblichen Voraussetzungen erweiternder Fassung:

Hilfssatz 2. *Es seien φ, ψ zwei in G stetige und im Innern stückweise mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen versehene Funktionen, für welche $D[\varphi]$ und $D[\psi]$ existieren; es möge im Innern von G der Ausdruck $\Delta\varphi$ noch stetig sein, während ψ die Randwerte Null besitzt; dann gilt die Greensche Formel*

$$D[\varphi, \psi] = -H[\psi, \Delta\varphi]. \tag{35}$$

Wir beweisen die Formel zunächst unter der Voraussetzung, daß G ein Kreis vom Radius R ist. Führen wir Polarkoordinaten r und ϑ um den Mittelpunkt ein, so wird

$$D[\psi] = \int_0^R\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)^2\right\} r\,dr\,d\vartheta.$$

Wegen der Schwarzschen Ungleichung und der Randbedingung $\psi = 0$ haben wir, wenn $R - r = h$ gesetzt wird und $R < 2r$ ist,

$$(\psi(r,\vartheta))^2 = \left(\int_r^R \frac{\partial\psi(r,\vartheta)}{\partial r}\,dr\right)^2 \leq h\int_r^R\left(\frac{\partial\psi(r,\vartheta)}{\partial r}\right)^2 dr \leq \frac{2h}{R}\int_r^R\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 r\,dr,$$

also bei Integration nach ϑ

$$\int_0^{2\pi}\psi(r,\vartheta)^2\,d\vartheta \leq \frac{2h}{R}\,D_h[\psi] = \frac{h}{R}\,\varepsilon_h, \tag{36}$$

wobei das Integral $D_h[\psi]$ über den Kreisring mit den Radien R und $R - h$

zu erstrecken ist und einen mit h gegen Null konvergierenden Wert $\frac{1}{2}\varepsilon_h$ besitzt. Es gibt ferner gewiß einen Zwischenwert r' zwischen R und $R-h$ derart, daß bei Integration über den Kreis vom Radius r'

$$37)\qquad \int\limits_{\substack{0\\(r=r')}}^{2\pi}\left(\frac{\partial\varphi(r,\vartheta)}{\partial r}\right)^2 r\,d\vartheta \leqq \frac{1}{2}\frac{\eta_h}{h}$$

wird, unter $\frac{1}{2}\eta_h$ ebenfalls eine mit h gegen Null konvergierende Größe, nämlich $D_h[\varphi]$, verstanden. Ersetzen wir in (36) r durch r', so bleibt die Ungleichung erst recht bestehen. Wenden wir nun auf den Kreis $K_{r'}$ mit dem Radius r' die Greensche Formel an, was wegen der über den Rand hinaus reichenden Existenz der in betracht kommenden Ableitungen ohne weiteres legitim ist, so folgt durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung aus (37), (36)

$$(D_{K_{r'}}[\psi,\varphi]+H_{K_{r'}}[\psi,\Delta\varphi])^2=\Big(\int\limits_{\substack{0\\(r=r')}}^{2\pi}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial r}r\,d\vartheta\Big)^2\leqq\int\limits_{\substack{0\\(r=r')}}^{2\pi}\psi^2\cdot r\,d\vartheta\cdot\int\limits_{\substack{0\\(r=r')}}^{2\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 r\,d\vartheta\leqq\frac{r'}{2R}\varepsilon_h\cdot\eta_h.$$

Hierbei ist h beliebig; es konvergiert mit abnehmendem h der Ausdruck $D_{K_{r'}}[\psi,\varphi]$ gegen $D_K[\psi,\varphi]$ und die Größe $\varepsilon_h\cdot\eta_h$ gegen Null. Somit ist der Hilfssatz für einen kreisförmigen Bereich bewiesen.

Ganz analog würden wir zu schließen haben, wenn die Berandung von G aus mehreren Kreisen bestünde.

Ist G kein Kreisbereich, so verfährt man am kürzesten[14]), indem man sich G auf einen Kreisbereich konform abgebildet denkt, was bekanntlich stets möglich ist. Da bei einer solchen Abbildung die Integrale $D[\varphi,\psi]$, $H[\psi,\Delta\varphi]$ in genau dieselben Integrale für den Kreisbereich übergehen und für diesen die Gleichung (35) bewiesen ist, so gilt sie ohne weiteres auch für G.

Die weiteren Hilfssätze dieses Paragraphen beziehen sich auf einen Vergleich der Integrale D und H.

Hilfssatz 3. *Es sei φ eine auf dem Rande von G verschwindende, in G stetige Funktion, für welche $D[\varphi]$ existiert und kleiner als eine Schranke M ist; es sei ferner Σ_ε ein Teilgebiet von G, dessen sämtliche Punkte vom Rande einen kleineren Abstand als ε besitzen; dann ist das Integral $H_{\Sigma_\varepsilon}[\varphi]$ kleiner als eine nur von ε und M abhängige, mit ε zugleich gegen Null konvergierende Größe.*

---

[14]) Will man den Abbildungssatz aus der Theorie der konformen Abbildung nicht benutzen, so schließt man am besten und ohne jede Schwierigkeit mit ganz ähnlichen Überlegungen, wie sie beim Beweise von Hilfssatz 3 verwendet werden. Eine Übertragung auf mehr unabhängige Variable macht dann keine neuen Schwierigkeiten.

Zum Beweise betrachten wir zunächst einen Randpunkt von G und schlagen um diesen einen Kreis K mit dem — genügend klein zu nehmenden — Radius h; das dem Kreise und G gemeinsame Gebiet heiße K; führen wir in dem Kreise konzentrische Polarkoordinaten r, ϑ ein und beachten, daß bei hinreichend kleinem h jeder Kreis $r \leqq h$ den Rand von G trifft und daß φ in diesen Punkten r, $\vartheta_0(r)$ verschwindet, so folgt aus der Beziehung

$$\varphi(r,\vartheta) = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\, d\vartheta$$

sofort

$$\varphi(r,\vartheta)^2 \leqq 2\pi \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\right)^2 d\vartheta$$

und durch Integration nach $r\,dr$

$$\int \varphi^2(r,\vartheta)\, r\, dr \leqq 2\pi \iint\limits_{(\mathsf{K})} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\right)^2 r\, dr\, d\vartheta \leqq 2\pi h^2 D_{\mathsf{K}}[\varphi].$$

(Die Integrale sind hierbei stets so zu verstehen, daß sie über die in K liegenden Teile des betreffenden Weges erstreckt werden.)

Integrieren wir nun noch nach ϑ, so folgt die Relation

$$H_{\mathsf{K}}[\varphi] \leqq 2\pi \cdot 2\pi h^2\, D_{\mathsf{K}}[\varphi], \tag{38}$$

also sicher erst recht

$$H_{\mathsf{K}}[\varphi] \leqq 4\pi^2 \cdot h^2 M. \tag{39}$$

Nun bedenken wir, daß wir gemäß den Vorbemerkungen in § 1 sicher eine mit ε gegen Null konvergierende Größe h und eine Anzahl N von Randpunkten P_i des Gebietes G finden können, derart daß $N \cdot h$ kleiner als eine nur vom Gebiet abhängende Zahl C ist und daß das Gebiet Σ_ε Teilgebiet desjenigen Teilgebietes S_h von G wird, welches G mit einem oder mehreren der um die Punkte P_i mit dem Radius h geschlagenen Kreise K_i gemein hat. Nun ist

$$H_{\Sigma_\varepsilon}[\varphi] \leqq H_{S_h}[\varphi] \leqq \sum_{i=1}^{N} H_{\mathsf{K}_i}[\varphi],$$

wobei die Summe über die N eben charakterisierten Kreise K_i bzw. die zugehörigen Gebiete K_i zu erstrecken ist. Aus (39) und $N \cdot h < C$ folgt nun sofort

$$H_{\Sigma_\varepsilon}[\varphi] < N h^2 \cdot 4\pi^2 M < h \cdot C\, 4\pi^2 M,$$

d. h. aber, der Hilfssatz ist bewiesen[15])

[15]) Durch bessere Ausnutzung der Beziehung (38) ließe sich das Resultat noch verschärfen, bzw. von der Voraussetzung der Rektifizierbarkeit der Randkurve befreien; jedoch braucht hierauf nicht eingegangen zu werden.

Hilfssatz 4. *Es mögen über φ die Voraussetzungen des Hilfssatzes 3 gelten; und es sei S ein in G gelegener rechteckiger Streifen von der Breite h, dann ist*

(40) $$H_S[\varphi] \leqq h \cdot C,$$

wo C eine nur von M und dem Gebiet G abhängige Zahl bedeutet.

Beweis. Die Punkte des Streifens S mögen etwa durch die Beziehungen

$$-a < x < a, \qquad 0 < y < h$$

charakterisiert sein. Es sei $P_0(x, y)$ ein Punkt von S, und P ein Schnittpunkt der durch P_0 gehenden Geraden $y =$ konst. mit dem Rande von G, so daß PP_0 ganz in G liegt. Dann ist

$$\varphi(x, y)^2 = \left(\int_{P_0}^{P} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy\right)^2 \leqq E \int_{P_0}^{P} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 dy,$$

also

(41) $$\int_{-a}^{a} \varphi(x, y)^2 dx < E \cdot M,$$

wo E die maximale Entfernung zweier Randpunkte von G bedeutet; somit ergibt sich

(40) $$H_S \leqq h \cdot E \cdot M = h \cdot C,$$

q. e. d.

§ 7.

Hilfssätze über die Differentialgleichung $\Delta\varphi + \lambda\varphi + f = 0$.

Es seien $f_1, f_2, \ldots$ sowie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ in einem Gebiete B stetige, bis zur zweiten Ordnung stetig differenzierbare Funktionen, und es gelte in B gleichmäßig

(42) $$\lim_{j=\infty} f_j = f.$$

Es seien ferner $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda$ Konstanten, für welche

(43) $$\lim_{j=\infty} \lambda_j = \lambda$$

gilt; die Funktionen φ_i mögen der Differentialgleichung

(44) $$\Delta\varphi_i + \lambda_i\varphi_i + f_i = 0$$

sowie den Bedingungen

(45) $$\lim_{\substack{i=\infty \\ j=\infty}} H[\varphi_i - \varphi_j] = 0$$

(45a) $$\lim_{\substack{i=\infty \\ j=\infty}} D[\varphi_i - \varphi_j] = 0 \text{ [16])}$$

[16]) Die Bedingung (45) ist übrigens eine Folge der Bedingung (45a), wie sich leicht aus den vorangehenden Entwicklungen ergibt.

genügen. Dann konvergieren die Funktionen φ_i in jedem ganz im Inneren von B gelegenen Teilgebiet gleichmäßig nebst ihren Ableitungen gegen eine Grenzfunktion φ bzw. deren Ableitungen, und es gilt

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi + f = 0. \tag{46}$$

Dem Beweise werde folgende Bemerkung vorausgeschickt: Bedeutet r den Abstand $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ und ist $K(r)$ diejenige Lösung der Differentialgleichung $\Delta K + K = 0$, welche die Form hat

$$K = \frac{1}{2\pi}\log r + S(r),$$

unter $S(r)$ eine überall für endliches r mit ihrer ersten Ableitung stetige und für $r \neq 0$ reguläre analytische Funktion von r verstanden, so genügt die Funktion

$$\omega(x,y) = \iint\limits_{(B)} K(\lambda r) f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

der Differentialgleichung

$$\Delta\omega + \lambda\omega + f = 0.$$

Wir beachten nämlich, daß $K(\lambda r)$ der Differentialgleichung

$$\Delta K(\lambda r) + \lambda K(\lambda r) = 0,$$

$S(x,y)$ also, wegen $\Delta \log r = 0$, der Differentialgleichung

$$\Delta S + \lambda\left(S + \frac{1}{2\pi}\log \lambda r\right) = 0 \tag{47}$$

genügt. Wir setzen

$$\omega = \omega' + \omega'',$$

$$\omega' = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(B)} \log \lambda r\, f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta, \qquad \omega'' = \iint\limits_{(B)} S(\lambda r) f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Nach der klassischen Potentialtheorie ist

$$\Delta\omega' + f = 0.$$

Ferner wird

$$\Delta\omega'' = \iint\limits_{(B)} \Delta S(\lambda r) f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = -\lambda \iint\limits_{(B)} K(\lambda r) f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = -\lambda\omega.$$

Also ist wirklich

$$\Delta\omega + \lambda\omega + f = 0. \tag{48}$$

Nunmehr definieren wir

$$\omega_i = \iint\limits_{(B)} K(\lambda_i r) f_i(\xi\,\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Dann folgt unmittelbar die in B gleichmäßige Konvergenz der Funk-

tionen ω_i sowie der ersten Ableitungen gegen eine Grenzfunktion ω und deren Ableitungen. Es ist also gewiß

$$\lim_{\substack{i=\infty\\ j=\infty}} H[\omega_i - \omega_j] = 0, \qquad \lim_{\substack{i=\infty\\ j=\infty}} D[\omega_i - \omega_j] = 0.$$

Setzen wir $\varphi_i = \omega_i + \chi_i$, so wird daher wegen (44), (48)

$$\Delta \chi_i + \lambda_i \chi_i = 0, \tag{49}$$

$$\lim_{\substack{i=\infty\\ j=\infty}} H[\chi_i - \chi_j] = 0, \tag{50}$$

$$\lim_{\substack{i=\infty\\ j=\infty}} D[\chi_i - \chi_j] = 0. \tag{51}$$

Bekanntlich[17]) gilt für jede Lösung ω der Differentialgleichung

$$\Delta \omega + \lambda \omega = 0$$

der sogenannte Mittelwertsatz

$$J(\lambda r)\,\omega(x, y) = \int_0^{2\pi} \omega\, d\vartheta,$$

wobei $J(t)$ die nullte Besselsche Funktion von t bedeutet, das Integral über eine Kreisperipherie vom Radius r um den Mittelpunkt (x, y) zu erstrecken ist, und mit ϑ wieder der Zentriwinkel nach dem Mittelpunkt bei beliebiger Anfangslage bezeichnet wird. Es wird also nach Multiplikation mit r und Integration zwischen den Grenzen 0 und R

$$\omega(x, y) \cdot \int_0^R J(\lambda r)\, r\, dr = \iint_{(K_R)} \omega(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{52}$$

wobei das Integral rechts über den Kreis K_R $(r \leqq R)$ zu erstrecken ist. Wegen der Konvergenz der λ_i können wir in der hieraus folgenden Gleichung

$$\chi_i(\xi, \eta) \int_0^R J(\lambda_i r)\, r\, dr = \iint_{(K_R)} \chi_i(x, y)\, dx\, dy \tag{53}$$

R von i unabhängig so wählen, daß $\int_0^R J(\lambda_i r)\, r\, dr$ oberhalb einer festen, von i unabhängigen Schranke bleibt[18]), und zugleich dürfen wir für alle Punkte eines ganz im Inneren von B liegenden Teilgebietes B' denselben Wert von R wählen. Nunmehr folgt aus (53), (50) unmittelbar

$$\lim_{\substack{i=\infty\\ j=\infty}} \left| \chi_i(\xi, \eta) \int_0^R J(\lambda_i r)\, r\, dr - \chi_j(\xi, \eta) \int_0^R J(\lambda_j r)\, r\, dr \right|^2 \leqq \lim_{\substack{i=\infty\\ j=\infty}} R^2 \pi H[\chi_i - \chi_j] = 0,$$

---

[17]) Vgl. etwa Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen der Physik 2. Band, S. 282.

[18]) Dies ergibt sich unmittelbar aus der Gleichung $J(0) = 1$.

und zwar gilt diese Relation gleichmäßig für alle Punkte von B'. Wegen der Konvergenz der Zahlen λ_i und damit der Ausdrücke $\int_0^R J(\lambda_i r)\, r\, dr$ folgt hieraus die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen χ_i in B'.

Genau ebenso ergibt sich unter Benutzung der Gleichung (51) die gleichmäßige Konvergenz der partiellen Ableitungen $\frac{\partial \chi_i}{\partial x}$ und $\frac{\partial \chi_i}{\partial y}$, welche ja ebenfalls der Differentialgleichung $\Delta\omega + \lambda\omega = 0$ genügen.

Nun gilt, wenn Γ irgendeine mit stetiger Tangente versehene geschlossene, ein im Inneren von B' liegendes Teilgebiet B'' abgrenzende Kurve bedeutet, wenn mit s die Bogenlänge auf dieser Kurve, mit $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die Differentiation nach der inneren Normale bezeichnet wird, für jeden inneren Punkt von B''

$$-\frac{1}{4}\int_\Gamma \left[K(\lambda_i r)\frac{\partial \chi_i}{\partial \nu} - \chi_i \frac{\partial K(\lambda_i r)}{\partial \nu}\right] ds = \chi_i(\xi, \eta), \tag{54}$$

wobei das Integral über die Kurve Γ zu erstrecken ist[19]). Da man in dieser Darstellung für jedes ganz im Inneren von B'' liegende Teilgebiet B''' nach ξ und η beliebig oft unter dem Integralzeichen differenzieren darf, so folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von χ_i und $\frac{\partial \chi_i}{\partial x}$ sowie $\frac{\partial \chi_i}{\partial y}$ auf Γ für B''' die gleichmäßige Konvergenz sämtlicher partiellen Ableitungen von χ_i; mithin gilt für die Grenzfunktion $\chi = \lim_{i=\infty} \chi_i$ wieder die Differentialgleichung $\Delta\chi + \lambda\chi = 0$ und daher für $\varphi = \omega + \chi$ die Differentialgleichung $\Delta\varphi + \lambda\varphi + f = 0$, womit der behauptete Satz bewiesen ist.

Übrigens zeigt (54) unmittelbar, daß die Funktionen χ_i ebenso wie χ unbeschränkt differenzierbar sind, während für ω_i, ω dies nur gilt, wenn über f_i, f entsprechende Voraussetzungen zutreffen, etwa wenn diese Funktionen selbst unbeschränkt differenzierbar sind. Sind die f_i, f analytische Funktionen von x und y, so gilt dasselbe von den φ_i und von φ.

§ 8.

Lösung eines Variationsproblems für Rechtecke.

Um das dieser Arbeit zugrunde liegende Variationsproblem zu lösen, machen wir uns den Umstand zunutze, daß wir ein analoges Problem elementar beherrschen, wenn an Stelle des Bereiches G ein beliebiges Rechteck[20]) R tritt. Wir formulieren das betreffende Variationsproblem folgendermaßen:

---

[19]) Vgl. etwa loc. cit. [17]), S. 280.

[20]) Man könnte statt der Rechtecke ebensogut etwa Kreise betrachten und in den späteren Überlegungen zugrunde legen.

Es seien R ein Rechteck der xy-Ebene, $v_1, v_2, \ldots, v_l$ gegebene, voneinander linear unabhängige analytische Funktionen im Rechteck, f eine stetige Funktion des Ortes auf dem Rande von R; es möge ferner die Funktion f so beschaffen sein, daß es eine in R stetige und mit stückweise stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung versehene Funktion φ_0 gibt, welche die Randwerte f besitzt und deren über R erstrecktes Integral $D[\varphi_0]$ einen endlichen Wert hat. Wir suchen nun eine Funktion φ, welche dieselben Randwerte besitzt, ebenfalls in R stetig und zweimal stückweise stetig differenzierbar ist, den Bedingungen

$$H[\varphi] = \alpha \tag{55}$$

$$H[\varphi, v_h] = \beta_h \qquad (h = 1, \ldots, l) \tag{56}$$

genügt und für welche $D[\varphi]$ möglichst klein wird; dabei bedeuten α und β_h solche gegebene Konstante, daß die Gramsche Determinante $\Delta\{\varphi, v_1, \ldots, v_l\}$, deren Wert nach Vorgabe dieser Konstanten festliegt, von Null verschieden ist[21]).

Um dieses Problem zu lösen, schicken wir voraus, daß wir die Eigenwerte und Eigenfunktionen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ und $u_1, u_2, \ldots$ des Rechtecks für die Differentialgleichung (1) bei der Randbedingung $u = 0$ explizite kennen (vgl. § 4), und zwar sind, wenn a und a' die Seitenlängen des Rechtecks bedeuten, die Eigenwerte durch die Ausdrücke $\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{a'^2}\right)$, die Eigenfunktionen durch die Ausdrücke $\frac{1}{4aa'} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a'}$ gegeben, und es gilt übrigens die asymptotische Gleichung

$$\lambda_n \simeq \frac{4\pi}{aa'} \cdot n, \tag{57}$$

wenn wieder $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die Reihe der nach ansteigender Größe geordneten Eigenwerte bedeutet. Die Funktionen $u_n(x, y)$ bilden, wie aus der Theorie der Fourierschen Reihen bekannt ist, ein vollständiges normiertes orthogonales Funktionensystem für das Rechteck R.

Es sei nun $p(x, y)$ die in R reguläre Potentialfunktion, welche die Randwerte f besitzt; bekanntlich[22]) existiert $D[p]$ (und ist nicht größer als $D[\varphi_0]$). Setzen wir $\varphi = p + \psi$, so besitzt ψ nunmehr die Rand-

---

[21]) Diese letzte Bedingung ist offenbar völlig naturgemäß; würden nämlich die Konstanten α und β_l so gegeben sein, daß das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\varphi, v_1, \ldots, v_l$ verschwinden muß, so würden von vornherein die Funktionen $\varphi, v_1, v_2, \ldots, v_l$ linear abhängig voneinander sein müssen.

[22]) Vgl. etwa Hadamard, Bull. Soc. math. France **34** (1906), oder Courant, Journal f. Math. **144** (1914), S. 190ff.

werte Null. Aus der Greenschen Formel des vorigen Paragraphen folgt $D[\psi, p] = 0$, es ist also

$$D[\varphi] = D[\psi] + D[p].$$

Wir können daher statt der Forderung, $D[\varphi]$ zum Minimum zu machen auch die Forderung: $D[\psi] = \text{Min.}$ aufstellen.

Wir gehen von unserem Variationsproblem zunächst zu einem einfachen Minimumproblem für unendlich viele Variable über, um dann von dessen Lösung zurückzuschließen. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\begin{aligned} H[\psi, u_k] &= \xi_k \\ H[p, u_k] &= p_k \\ H[v_i, u_k] &= v_k^{(i)}, \end{aligned} \qquad \begin{matrix}(k = 1, 2, 3, \ldots) \\ (i = 1, 2, \ldots, l)\end{matrix}$$

und haben dann zufolge der Vollständigkeitseigenschaft der Funktionen u_k

$$D[\psi] = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2$$

$$H[\varphi] = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k + p_k)^2$$

$$H[\varphi, v_i] = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k + p_k) v_k^{(i)}.$$

Hierbei ist zu bemerken, daß die Summen $H[p] = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2$ und $H[v_i] = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^{(i)2}$ konvergieren. Setzen wir noch $\eta_k = \sqrt{\lambda_k} \cdot \xi_k$, so entsteht das Minimumproblem

$$D(\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^2 = \text{Min.},$$

(58) $$F(\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\eta_k}{\sqrt{\lambda_k}} + p_k \right)^2 = \alpha,$$

(59) $$G_i(\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\eta_k}{\sqrt{\lambda_k}} + p_k \right) v_k^{(i)} = \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

Dieses läßt die Existenz eines Lösungssystems $\eta_1, \eta_2, \ldots$ leicht erkennen. Ist nämlich d die untere Grenze der Werte, welche $D(\eta)$ bei Variation der Werte unter Berücksichtigung von (58), (59) annehmen kann, so gibt es Stellen $\eta_1^{(t)}, \eta_2^{(t)}, \eta_3^{(t)}, \ldots$ $(t = 1, 2, \ldots)$ derart, daß

$$\lim_{t=\infty} D(\eta^{(t)}) \doteq d$$

ist, und daß die Werte $\lim\limits_{t=\infty} \eta_k^{(t)} = \eta_k$ existieren[23]). Aus $F(\eta^{(t)}) = \alpha$ und $G_i(\eta^{(t)}) = \beta_i$ folgt fast unmittelbar[24])

$$F(\eta) = \alpha, \quad G_i(\eta) = \beta_i.$$

Es ist ferner

$$D_h(\eta) = \sum_{k=1}^{h} \eta_k^2 = \lim_{t=\infty} \sum_{k=1}^{h} \eta_k^{(t)2} \leq \lim_{t=\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^{(t)2} = d.$$

Daher ist auch

$$D(\eta) = \lim_{h=\infty} D_h(\eta) \leq d.$$

Da aber notwendig $D(\eta) \geq d$ ist, so folgt $D(\eta) = d$, d. h. das Wertsystem $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ löst unser algebraisches Minimumproblem. Nachdem die Existenz dieser Lösung erkannt ist, folgt genau wie bei endlich vielen Variablen die Existenz von nicht gleichzeitig verschwindenden, nur bis auf einen willkürlichen gemeinsamen Faktor bestimmten Konstanten $\mu_0, \lambda, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$, so daß

$$(60) \qquad \mu_0 \lambda_k \xi_k + \lambda(\xi_k + p_k) + \sum_{i=1} \mu_i v_k^{(i)} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

bzw., wenn nicht gerade $\mu_0 \lambda_k + \lambda = 0$ ist,

$$(61) \qquad \xi_k = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{l} \mu_i v_k^{(i)} + \lambda p_k}{\mu_0 \lambda_k + \lambda}$$

gilt. Wegen der Voraussetzung des Nichtverschwindens der Gramschen Determinante $\Delta\{\varphi, v_1, \ldots, v_l\}$, deren Wert ja durch die Daten des Problemes gegeben ist, kann die Größe μ_0 nicht verschwinden[25]). Wir dürfen also $\mu_0 = 1$ setzen. Nunmehr folgt aus (61) und (57), daß wir

---

[23]) Die Möglichkeit, aus einer Folge von Stellen mit beschränkter Quadratsumme der Koordinaten eine „konvergente Punktfolge" auszuwählen, bildet den Inhalt des ohne weiteres auf unseren Fall übertragbaren Weierstraßschen Häufungsstellensatzes. Vgl. die üblichen Darstellungen in der Theorie der quadratischen Funktionen von unendlich vielen Variablen.

[24]) Nämlich durch Berücksichtigung des Umstandes, daß die Größen λ_k mit k über alle Grenzen wachsen.

[25]) Wenn wir nämlich unter der Voraussetzung $\mu_0 = 0$ die Gleichungen (60) mit $\xi_k + p_k$ bzw. $v_k^{(i)}$ multiplizieren und über k summieren, so erhalten wir für die nicht sämtlich verschwindenden $l+1$ Größen $\lambda, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ ein homogenes Gleichungssystem von $l+1$ Gleichungen, dessen Determinante gerade die Gramsche Determinante $\Delta\{\varphi, v_1, \ldots, v_n\}$ ist; dies ist aber wegen ihres Nichtverschwindens nicht möglich.

$\xi_k = \frac{a_k}{k}$ setzen dürfen, wobei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergiert. Daher wird die Reihe

$$\psi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k(x,y) \tag{62}$$

wegen der Beschränktheit der Funktionen u_k absolut und gleichmäßig konvergieren; denn es ist

$$\left(\sum_{k=m}^{m'} |\xi_k u_k|\right)^2 \leq \text{Konst} \sum_{k=m}^{m'} a_k^2 \cdot \sum_{k=m}^{m'} \frac{1}{k^2}.$$

Die Reihe (62) stellt somit eine im Rechteck R stetige Funktion mit den Randwerten Null dar. Wir behaupten, *daß diese Funktion das ursprüngliche Variationsproblem dieses Paragraphen löst und daß die Lösung $\varphi = p + \psi$ der Differentialgleichung*

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi + \sum_{i=1}^{l} \mu_i v_i = 0 \tag{63}$$

genügt. Um dies zu zeigen, bilden wir mit der aus den Elementen bekannten, zu den Randwerten Null gehörigen Greenschen Funktion $G(x,y;\,\xi,\eta)$ des Ausdruckes Δu für das Rechteck R die Funktion

$$\psi^*(x,y) = -\int_{(R)} G(x,y;\,\xi,\eta)\left[\lambda\varphi(\xi,\eta) + \sum_{i=1}^{l} \mu_i v_i(\xi,\eta)\right] d\xi\, d\eta.$$

Einerseits ist wegen der Grundeigenschaft der Greenschen Funktion

$$\Delta\psi^*(x,y) + \lambda\varphi(x,y) + \sum_{i=1}^{l} \mu_i v_i(x,y) = 0.$$

Andererseits gilt wegen der Vollständigkeitsrelation aus der Theorie der Fourierschen Reihen

$$\psi^*(x,y) = -\sum_{k=1}^{\infty} \int_{(R)} G u_k(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \cdot \int_{(R)} \left[\lambda\varphi(\xi,\eta) + \sum_{i=1}^{l} \mu_i v_i(\xi,\eta)\right] u_k(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x,y)}{\lambda_k}\left[\lambda(\xi_k + p_k) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_k^{(i)}\right],$$

d. h. wegen (60), (62)

$$\psi^* = \psi.$$

Da nun $\Delta p = 0$ ist, so haben wir unsere Behauptungen bewiesen.

Kapitel III.

Der Existenzbeweis für die Lösungen des Eigenwertproblemes.

Wir wenden uns nun, anknüpfend an Kapitel I, zur weiteren Durchführung des Existenzbeweises. Dabei dürfen wir gemäß dem im Satze des § 5 auf S. 292 ausgesprochenen Ergebnis von vornherein eine Minimalfolge der asymptotischen Dimensionszahl 1 zugrunde legen, d. h. eine Minimalfolge $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots,$ für welche die Relationen

(64) $$\lim_{\substack{i=\infty \\ j=\infty}} D[\varphi_i - \varphi_j] = 0,$$

(65) $$\lim_{\substack{i=\infty \\ j=\infty}} H[\varphi_i - \varphi_j] = 0$$

gelten

§ 9.

Eine Eigenschaft der Minimalfolgen.

Wir beweisen zunächst eine für das folgende wichtige Eigenschaft der Minimalfolgen unseres Problemes: *Es kann keine Minimalfolge außerhalb eines ganz im Inneren von G liegenden Rechteckes R identisch verschwinden.* Wäre dies für die obige Minimalfolge der Fall, so könnten wir beliebig viele voneinander linear unabhängige Lösungen des Variationsproblemes von § 3 konstruieren. Es sind nämlich für das Rechteck R alle Voraussetzungen des § 8 erfüllt, indem für α der Wert 1, für die β_i die Werte Null treten und sich für $\Delta\{\varphi, v_1, \ldots, v_l\}$ sofort der Wert 1 ergibt. Wir können also für das Rechteck R das Variationsproblem des § 8 lösen, indem wir als Randwerte die Werte Null nehmen; da die untere Grenze bei diesem Variationsproblem mit der unteren Grenze d des ursprünglichen Problemes I von § 3 wegen des identischen Verschwindens der Funktionen φ_k außerhalb R übereinstimmt, so gibt es also eine Funktion φ, für welche $D[\varphi] = d$ ist, welche außerhalb R verschwindet, die allen übrigen Bedingungen des Variationsproblemes I aus § 3 genügt und welche in R die Differentialgleichung

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi + \sum_{i=1}^{l} \mu_i v_i = 0$$

mit gewissen Konstanten λ, μ_i befriedigt; die Funktion φ ist also in R analytisch; sie löst überdies das Variationsproblem des § 3.

Sind nun R', R'', R''', $R^{(4)}, \ldots$ weitere Rechtecke, von welchen jedes das vorangehende ganz im Inneren enthält, aber noch ganz im

Inneren von G liegt, so gehören zu diesen ebensolche Funktionen φ', φ'', φ''', ...; alle diese Funktionen sind Lösungen unseres ursprünglichen Variationsproblemes, und alle sind voneinander linear unabhängig; denn aus einer Relation $c\varphi + c'\varphi' + \ldots + c^{(q)}\varphi^{(q)} \equiv 0$ mit konstanten Koeffizienten $c^{(i)}$ würde sofort folgen $c^{(q)} = 0$, da in dem zwischen $R^{(q-1)}$ und $R^{(q)}$ liegenden Gebiete die Funktionen $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(q-1)}$ identisch verschwinden, nicht aber die Funktion $\varphi^{(q)}$. Nehmen wir q solcher Rechtecke, so haben wir in der Funktionenfolge $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(q)}$; $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(q)}$; $\varphi \ldots$ eine Minimalfolge der Dimensionszahl $q+1$, was nach dem Satz von § 5, S. 290 bei beliebig großem q nicht möglich ist. Somit haben wir die aufgestellte Behauptung erwiesen.

§ 10.

Konstruktion einer Grenzfunktion.

Mit Hilfe der Minimalfolge $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, welche keineswegs selbst zu konvergieren braucht, wollen wir uns nun eine Grenzfunktion u für G konstruieren, von welcher sich dann zeigen wird, daß sie die gesuchte Lösung unseres Variationsproblemes darstellt. Wir gehen dabei schrittweise vor und beginnen damit, eine *Einteilung von G in Rechtecke* zu treffen. Wir denken uns nämlich das Gebiet G derart mit einer Folge von Rechtecken $R_1, R_2, R_3, \ldots$ überdeckt, daß jeder Punkt von G innerer Punkt mindestens eines Rechteckes wird und daß jedes ganz im Inneren von G liegende Gebiet G^* nur mit endlich vielen der Rechtecke R_h Punkte gemein hat. Wir können also, indem wir von einem beliebigen Rechteck der Einteilung ausgehen und an dieses der Reihe nach neue Rechtecke anhängen, deren jedes mit mindestens einem der vorangehenden gemeinsame innere Punkte besitzt, nach endlich vielen Schritten ein vorgegebenes Teilgebiet G^* überdecken.

1. Auswahl eines Rechteckes. *Es muß unter den Rechtecken jedenfalls eines, R, geben, für welches das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\varphi_i, v_1, v_2, \ldots, v_l$ bei wachsendem i oberhalb einer festen, positiven, von i unabhängigen Schranke bleibt.* Wir führen den Beweis hierfür wieder indirekt. Angenommen, es gäbe für jedes beliebige der Rechtecke bei hinreichend großem i Konstanten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ mit der Quadratsumme 1, so daß

$$H_R\left[c_0\varphi_i - \sum_{\nu=1}^{l} c_\nu v_\nu\right]$$

beliebig klein wird, dann kann der Koeffizient c_0 nicht, absolut genommen, unter jede Grenze sinken, denn sonst wäre das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_l$ für R beliebig klein, d. h. aber Null, was un-

möglich ist, da die v_ν analytische, in keinem Gebiete voneinander linear abhängige Funktionen sind. Wir können also, indem wir durch c_0^2 dividieren, auf die Existenz von l mit wachsendem i absolut genommen beschränkt bleibenden, im übrigen von i abhängigen Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_l$ schließen, derart, daß

$$(66)\qquad \lim_{i=\infty} H_R\Big[\varphi_i - \sum_{\nu=1}^{l} a_\nu v_\nu\Big] = 0$$

gilt. Ist nun R' ein weiteres Rechteck, welches mit R das Gebiet B gemein hat, so muß es auch, zufolge unserer Annahme, ebensolche Konstante a_ν' geben, derart, daß

$$(67)\qquad \lim_{i=\infty} H_{R'}\Big[\varphi_i - \sum_{\nu=1} a_\nu' v_\nu\Big] = 0$$

wird. Es gilt also erst recht

$$\lim_{i=\infty} H_B\Big[\varphi_i - \sum_{\nu=1}^{l} a_\nu v_\nu\Big] = 0, \qquad \lim_{i=\infty} H_B\Big[\varphi_i - \sum_{\nu=1} a_\nu' v_\nu\Big] = 0,$$

und hieraus folgt in der gewohnten Weise, wenn wir $b_\nu = a_\nu - a_\nu'$ setzen,

$$\lim_{i=\infty} H_B\Big[\sum_{\nu=1}^{l} b_\nu v_\nu\Big] = 0.$$

Da nun die Funktionen v_ν in B ein positives Unabhängigkeitsmaß haben, so muß $\lim\limits_{i=\infty} b_\nu = 0$ sein. Wir dürfen daher in (67) die Zahlen a_ν' durch a_ν ersetzen. Indem wir nun weiter durch Anhängung einer Anzahl N von Rechtecken ein vorgegebenes Teilgebiet G^* von G überdecken, schließen wir auf die Existenz von beschränkt bleibenden, noch von i abhängigen, Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_l$, für welche

$$\lim_{i=\infty} H_{G^*}\Big[\varphi_i - \sum_{\nu=1}^{l} a_\nu v_\nu\Big] = 0,$$

der Ausdruck links in dieser Beziehung also bei hinreichend großem i beliebig klein ist. Nun können wir aber nach Hilfssatz 3 das Gebiet G^* so wählen, daß für den übrigbleibenden Teil Σ der Ausdruck $H_\Sigma[\varphi_i]$ beliebig klein wird; da die Konstanten a_ν beschränkt sind und die Ausdrücke $H_\Sigma[v_\nu]$ ebenfalls gleichzeitig mit $H_\Sigma[\varphi_i]$ beliebig klein gemacht werden können, so kann zufolge der Relationen (5), (7) aus § 1 auch $H_\Sigma[\sum\limits_{\nu=1}^{l} a_\nu v_\nu - \varphi_i]$ beliebig klein gemacht werden. Es müßte daher $H_G[\varphi_i - \sum\limits_{\nu=1}^{l} a_\nu v_\nu]$ selbst bei hinreichend großem i beliebig klein werden.

Nun ist aber wegen (15), (16), (18)

$$H_G\left[\varphi_i - \sum_{\nu=1}^{l} a_\nu v_\nu\right] = 1 + \sum_{\nu=1}^{l} a_\nu^2,$$

was ersichtlich einen Widerspruch bedeutet.

Ist nun R ein Rechteck, für welches bei *gewissen* beliebig groß wählbaren Werten von i das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\varphi_i, v_1, \ldots, v_l$ oberhalb einer positiven Schranke, etwa $2\gamma^2$, bleibt, so gilt entsprechendes für *jeden* hinreichend großen Wert von i, wie unmittelbar aus der Beziehung (65) und den Schlußbemerkungen in § 1 hervorgeht.

Wir denken uns nunmehr ein solches Rechteck R ausgewählt, für welches das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\varphi_i, v_1, \ldots, v_l$ bei wachsendem i oberhalb einer festen Schranke $2\gamma^2$ bleibt; dann gilt nach § 2 für die Gramsche Determinante die Ungleichung

$$\Delta_R\{\varphi_i, v_1, v_2, \ldots, v_l\} \geqq (2\gamma^2)^{l+1} = 2b.$$

Ist nun R' ein im Inneren von R gelegenes, zu R parallel orientiertes Rechteck, dessen Seiten von den entsprechenden Seiten von R einen Abstand h besitzen, dann läßt sich zufolge des Hilfssatzes 4, S. 299, und der Beziehungen (5), (7) die Zahl h so klein wählen, daß für den zwischen R und R' liegenden Bereich B unabhängig von i die Beziehung

$$H[c_0\varphi_i + c_1 v_1 + \ldots + c_l v_l] < \gamma^2$$

gilt, wie auch immer $c_0, c_1, \ldots, c_l$ unter der Bedingung $c_0^2 + \ldots + c_l^2 = 1$ gewählt werden. Dann aber muß für R' gelten

$$H_{R'}[c_0\varphi_i + c_1 v_1 + \ldots + c_l v_l] \geqq \gamma^2 \tag{68}$$

und zufolge § 2

$$\Delta_{R'}\{\varphi_i, v_1, v_2, \ldots, v_l\} \geqq \gamma^{2(l+1)} = e, \tag{69}$$

wo e eine von i unabhängige positive Schranke bedeutet. Beide Ungleichungen (68), (69) dürfen nach § 2 erst recht als gültig angesehen werden für jedes in R liegende Rechteck R'', dessen Seiten von denen von R einen kleineren Abstand als h besitzen.

2. Vorbereitung des Konvergenzbeweises. Nach diesen Vorbereitungen „*glätten*" wir die Funktion φ_i für das Rechteck R, indem wir für dieses Rechteck das Variationsproblem des § 7 lösen; hierbei sind die in § 7 als α und β_ν bezeichneten Größen mit den Zahlen $H_R[\varphi_i]$ bzw. $H_R[\varphi_i, v_\nu]$ zu identifizieren und als Randwerte f die von φ_i auf dem Rande von R angenommenen Werte zu nehmen. Da hier alle Voraussetzungen des § 7 erfüllt sind, so erhalten wir als Lösung in R eine ana-

lytische, auf dem Rande mit φ_i übereinstimmende Funktion ψ_i sowie Konstante λ_i, $\mu_{i,1}, \ldots, \mu_{i,l}$, so daß in R die Differentialgleichung

$$\Delta \psi_i + \lambda_i \psi_i + \sum_{\nu=1}^{l} \mu_{i,\nu} v_\nu = 0 \tag{70}$$

und die Beziehungen

$$H_R[\psi_i] = H_R[\varphi_i], \quad H_R[\psi_i, v_\nu] = H_R[\varphi_i, v_\nu], \quad D_R[\psi_i] \leqq D_R[\varphi_i] \tag{71}$$

gelten. Wir setzen ψ_i über R hinaus in das ganze Gebiet G fort, indem wir ψ_i außerhalb R mit φ_i identifizieren; offenbar erfüllen dann die Funktionen ψ_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ alle Bedingungen des ursprünglichen Variationsproblemes I aus § 3 und bilden, da aus (71) die Ungleichung $D[\psi_i] \leqq D[\varphi_i]$ folgt, wieder eine Minimalfolge. Wir behaupten, daß diese „im wesentlichen" mit der Minimalfolge der φ_i identisch ist, indem die Relationen gelten:

$$\lim_{i=\infty} H[\varphi_i - \psi_i] = 0, \tag{72}$$

$$\lim_{i=\infty} D[\varphi_i - \psi_i] = 0, \tag{73}$$

aus denen sofort auf Grund von (64), (65) die weiteren

$$\lim_{\substack{i=\infty\\ j=\infty}} H[\psi_i - \psi_j] = 0, \tag{74}$$

$$\lim_{\substack{i=\infty\\ j=\infty}} D[\psi_i - \psi_j] = 0 \tag{75}$$

nach der üblichen Schlußweise folgen. Zum Beweise nehmen wir an, es gäbe beliebig große Werte $i_1, i_2, i_3, \ldots$, für welche $a_k^2 = H[\varphi_{i_k} - \psi_{i_k}] > a^2$ bliebe, unter a^2 eine feste positive Konstante verstanden, dann würden die Funktionen $\chi_k = \frac{\varphi_{i_k} - \psi_{i_k}}{a_k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, nach dem Satze aus § 3, S. 287, eine Minimalfolge bilden; nach dem Ergebnis von § 9 ist dies aber unmöglich, da die Funktionen χ_k sämtlich außerhalb R identisch verschwinden. Aus der so bewiesenen Gleichung (72) folgt nun mit Hilfe der Relation (21) aus § 3 in der üblichen Weise (73), womit dann auch (74) und (75) bestätigt sind.

Wir merken noch an, daß auf Grund von (71) die Ungleichungen (68), (69) sofort in

$$H_R[c_0 \psi_i + c_1 v_1 + \ldots + c_l v_l] \geqq \gamma^2, \tag{68a}$$

$$\Delta_R' \{\psi_i, v_1, \ldots, v_l\} \geqq e \tag{69a}$$

übergehen.

3. Konvergenzbeweis für ein Rechteck. Nunmehr wenden wir uns zum ***Konvergenzbeweise für die Funktionen*** ψ_i ***im Rechteck*** R, indem wir folgende Behauptung voranstellen: Die Konstanten $\mu_{i,1}, \ldots, \mu_{i,l}$ und λ_i konvergieren gegen Grenzwerte $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ und λ; die Funktionen ψ_i konvergieren nebst ihren Ableitungen in jedem ganz innerhalb R liegenden Gebiete gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion u bzw. deren Ableitungen, für welche die Gleichung

$$\Delta u + \lambda u + \sum_{\nu=1}^{l} \mu_\nu v_\nu = 0 \tag{76}$$

gilt.

Dem Beweise schicken wir die folgende Bemerkung voraus: Ist χ irgendeine in G stetige Funktion, deren Integral $D[\chi]$ existiert, so gibt es unter den zwischen R und R' gelegenen Zwischenrechtecken R'' gewiß eines, für welches die Ungleichung

$$\int\limits_{(R'')} \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2\right] ds < 4\,\frac{D[\chi]}{h}$$

gilt, wobei das Integral links um den Rand des Rechteckes R'' herumerstreckt und mit s die Bogenlänge auf diesem Rande bezeichnet werden soll.

In der Tat sei S ein Streifen, welcher aus R durch zwei Parallelen im Abstande h, etwa die Geraden $y = 0$ und $y = h$ herausgeschnitten wird. Wegen

$$D_G[\chi] \geqq D_S[\chi] = \int_0^h dy \int \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2\right] dx$$

muß es in dem Streifen S eine Gerade $y =$ konst. geben, für welche das über ihren ganzen Verlauf in G erstreckte Integral $\int \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2\right] dx$ einen Wert nicht größer als $\frac{D[\chi]}{h}$ besitzt; diese Überlegung, auf jedes der vier Seitenpaare von R und R' angewandt, gibt sofort die Richtigkeit unserer Behauptung. Bezeichnen wir wieder mit $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die Differentiation nach der inneren Normale der Begrenzung von R'', so gilt also erst recht

$$\int\limits_{(R'')} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \nu}\right)^2 ds \leqq 4\,\frac{D[\chi]}{h}. \tag{77}$$

Wir wenden diese Bemerkung nunmehr an, indem wir R'' zum Index i so wählen, daß für die Funktion $\chi = \psi_i$ die Beziehung

$$\int\limits_{(R'')} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \nu}\right)^2 ds \leqq 4\,\frac{D[\psi_i]}{h} \tag{77a}$$

besteht. Dann folgern wir leicht, daß die über R'' erstreckten Integrale $H_{R''}[\psi_i, \Delta\psi_i]$, $H_{R''}[v_\nu, \Delta\psi_i]$ $(\nu = 1, 2, \ldots, l)$ absolut genommen unterhalb einer von i unabhängigen Schranke bleiben. In der Tat ist nach der Greenschen Formel, auf R'' angewandt,

$$H_{R''}[\psi_i, \Delta\psi_i] + D_{R''}[\psi_i] = -\int\limits_{(R'')} \psi_i \frac{\partial\psi_i}{\partial\nu} ds,$$

also

$$\{H_{R''}[\psi_i, \Delta\psi_i] + D_{R''}[\psi_i]\}^2 \leqq \int\limits_{(R'')} \psi_i^2 ds \cdot \int\limits_{(R'')} \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial\nu}\right)^2 ds.$$

Nun ist nach (77a) und nach Gl. (41), S. 299 jeder der beiden Faktoren rechts beschränkt, woraus wegen der Beschränktheit von $D_{R''}[\psi_i]$ für $H_{R''}[\psi_i, \Delta\psi_i]$ die behauptete Beschränktheit folgt. Für die Ausdrücke $H_{R''}[v_n, \Delta\psi_i]$ folgt dasselbe ganz analog aus der Gleichung

$$H_{R''}[v_n, \Delta\psi_i] = H_{R''}[\psi_i, \Delta v_n] - \int\limits_{(R'')} \left[v_n \frac{\partial\psi_i}{\partial\nu} - \psi_i \frac{\partial v_n}{\partial\nu}\right] ds$$

und der Beschränktheit der Funktionen v_n, $\frac{\partial v_n}{\partial\nu}$.

Multiplizieren wir jetzt die Gleichung (70) der Reihe nach mit $\psi_i, v_1, v_2, \ldots, v_l$ und integrieren wir über R'', so ergibt sich für die $l+1$ Größen $\lambda_i, \mu_{i,1}, \ldots, \mu_{i,l}$ das folgende lineare System von $l+1$ Gleichungen:

$$(78)\quad \left\{\begin{aligned}
&H[\psi_i, \psi_i]\cdot\lambda_i + \sum_{\nu=1}^{l} H[\psi_i, v_\nu]\cdot\mu_{i,\nu} = -H[\psi_i, \Delta\psi_i]\\
&H[\psi_i, v_1]\cdot\lambda_i + \sum_{\nu=1}^{l} H[v_1, v_\nu]\cdot\mu_{i,\nu} = -H[v_1, \Delta\psi_i]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&H[\psi_i, v_l]\cdot\lambda_i + \sum_{\nu=1}^{l} H[v_l, v_\nu]\cdot\mu_{i,\nu} = -H[v_l, \Delta\psi_i],
\end{aligned}\right.$$

wobei die Integrale H stets über R'' zu erstrecken sind. Die Determinante dieses Gleichungssystems ist gerade die Gramsche Determinante $\Delta_{R''}\{\psi_i, v_1, \ldots, v_l\}$, also gemäß (69a) absolut genommen größer als die feste, von i unabhängige positive Zahl e; die Koeffizienten der Gleichung sind sämtlich beschränkt, nämlich kleiner als 1; also sind auch die Lösungen $\lambda_i, \mu_{i,1}, \ldots, \mu_{i,l}$ absolut genommen bei wachsendem i beschränkt.

Wir wollen nun darüber hinaus zeigen, daß sie bestimmten Grenzwerten mit wachsendem i zustreben.

Zu diesem Zwecke gehen wir von der aus (70) unmittelbar folgenden Gleichung

$$\Delta(\psi_i - \psi_j) + \lambda_j(\psi_i - \psi_j) + (\lambda_i - \lambda_j)\psi_i + \sum_{\nu=1}^{l}(\mu_{i,\nu} - \mu_{j,\nu})v_\nu = 0$$

aus, multiplizieren diese der Reihe nach mit $\psi_i, v_1, v_2, \ldots, v_l$, und integrieren die so entstehenden Gleichungen wiederum über ein Rechteck R'', welches nunmehr so gewählt wird, daß die Gleichung (77) für $\chi = \psi_i - \psi_j$ gilt. Das so folgende Gleichungssystem für die Differenzen $\xi_0 = \lambda_i - \lambda_j$, $\xi_1 = \mu_{i,1} - \mu_{j,1}, \ldots, \xi_l = \mu_{i,l} - \mu_{j,l}$ hat die Form

$$(78\text{a})\quad \left\{\begin{array}{l} H[\psi_i, \psi_i]\xi_0 + \sum_{\nu=1}^{l} H[\psi_i, v_\nu]\cdot\xi_\nu = -H[\psi_i, \Delta\chi] - \lambda_j H[\psi_i, \chi] \\ H[\psi_i, v_1]\xi_0 + \sum_{\nu=1}^{l} H[v_1, v_\nu]\cdot\xi_\nu = -H[v_1, \Delta\chi] - \lambda_j H[v_1, \chi] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ H[\psi_i, v_l]\xi_0 + \sum_{\nu=1}^{l} H[v_l, v_\nu]\cdot\xi_\nu = -H[v_l, \Delta\chi] - \lambda_j H[v_l, \chi]. \end{array}\right.$$

Sein Koeffizientenschema und also seine Determinante ist mit dem der Gleichungen (78) bzw. dessen nach unten beschränkter Determinante identisch, während, wie wir uns überzeugen wollen, seine rechten Seiten bei hinreichend großem i und j absolut genommen beliebig klein werden. In der Tat folgt aus der Beschränktheit der λ_j und der Schwarzschen Ungleichung wegen (74) sofort, daß die zweiten Summanden der Glieder auf der rechten Seite mit wachsendem i und j gegen Null konvergieren; für die ersten Summenden folgt dasselbe genau wie oben unter Berücksichtigung das Umstandes, daß $D[\chi] = D[\psi_i - \psi_j]$ bei hinreichend großem i, j wegen (75) beliebig klein ist.

Wir schließen hieraus, daß die Lösungen $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_l$ dieses Gleichungssystems selbst absolut bei hinreichend großem i und j beliebig klein werden; dies ist aber nichts anderes als der Ausdruck für die behauptete Konvergenz der Größen $\lambda_i, \mu_{i,1}, \ldots, \mu_{i,l}$. Wir bezeichnen die Grenzwerte mit $\lambda, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$.

Setzen wir nunmehr $f_i = \sum_{\nu=1}^{l} \mu_{i,\nu} v_\nu$, so konvergiert diese Funktion in G gleichmäßig gegen $f = \sum_{\nu=1}^{l} \mu_\nu v_\nu$. Es ergibt sich also wegen der Gleichungen (74), (75) aus dem Hilfssatz in § 7 sofort, daß die Funktionen ψ_i in jedem ganz im Inneren von R liegenden Teilgebiet B nebst ihren Ableitungen gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion u bzw. deren Ableitungen konvergieren, und daß diese Grenzfunktion der Differential-

gleichung (76) genügt. Diese zunächst nur für das Rechteck R definierte Funktion ist, da die Funktionen v_ν analytisch vorausgesetzt wurden, selbst analytisch. Aus dieser letzten Tatsache folgt, daß das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $u, v_1, v_2, \ldots, v_l$ für jedes Teilgebiet von R positiv sein muß, da sonst zwischen diesen Funktionen in diesem Teilgebiete, und somit wegen ihres analytischen Charakters überall in R eine lineare Abhängigkeit bestehen würde, was wegen der über das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\psi_i, v_1, \ldots, v_l$ gemachten Voraussetzungen (68a) nicht möglich ist. Da die ψ_i in jedem ganz im Innern von R liegenden Teilgebiete gleichmäßig gegen u konvergieren, so muß somit auch bei hinreichend großem i das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\psi_i, v_1, v_2, \ldots, v_l$ für jedes solche Teilgebiet oberhalb einer festen positiven, von i unabhängigen Schranke liegen.

4. Konvergenzbetrachtung für das ganze Gebiet. Nachdem wir die Grenzfunktion u für *ein* Rechteck R konstruiert haben, macht ihre Herstellung für die weiteren Rechtecke unserer Einteilung keine Schwierigkeiten mehr. Wir nehmen zunächst ein weiteres dieser Rechtecke, welches mit R ein gemeinsames Gebiet B besitzt, und bezeichnen dieses Rechteck — eine Gefahr der Verwechslung liegt nicht vor — mit R'. Auch für R' muß das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\psi_i, v_1, v_2, \ldots, v_l$ bei wachsendem i oberhalb einer positiven festen Schranke bleiben; ist nämlich B^* ein im Innern von B liegendes Teilgebiet von B, so ist, wie wir eben sahen, das Unabhängigkeitsmaß der Funktionen $\psi_i, v_1, \ldots, v_l$ für B^* oberhalb einer festen positiven Schranke; wegen der Relation (72) folgt also das gleiche in der gewohnten Weise für die Funktionen $\varphi_i, v_1, \ldots, v_l$; also gilt nach § 2 dasselbe erst recht für das Unabhängigkeitsmaß dieser Funktionen in R'.

Wir können also für R' genau dieselben Überlegungen anstellen wie eben für R und erhalten so in R' Funktionen ψ_i', u' sowie Konstanten λ_i', $\mu_{i,\nu}'$; λ', μ_ν', zwischen denen alle Relationen bestehen, welche sich aus (76), (72), (73), (74), (75) bei Ersetzung der Zeichen ψ_i, u, $\lambda_i, \ldots$ durch ψ_i', u', $\lambda_i', \ldots$ ergeben. Wir wollen zeigen, daß $\lambda' = \lambda$, $\mu'_\nu = \mu_\nu$ ist und daß in dem gemeinsamen Gebiete B die Funktionen u und u' identisch sind, so daß also u' die analytische Fortsetzung von u bildet. Dies ergibt sich leicht folgendermaßen: Es ist wegen $\lim\limits_{i=\infty} H_{R'}[\psi_i' - \varphi_i] = 0$, $\lim\limits_{i=\infty} H_R[\psi_i - \varphi_i] = 0$ erst recht $\lim\limits_{i=\infty} H_{B^*}[\psi_i' - \varphi_i] = 0$, $\lim\limits_{i=\infty} H_{B^*}[\psi_i - \varphi_i] = 0$, also auch $\lim\limits_{i=\infty} H_{B^*}[\psi_i' - \psi_i] = 0$. Da nun in B^* die Funktionen ψ_i, ψ_i' gleichmäßig gegen u bzw. u' konvergieren, so folgt $H_{B^*}[u - u'] = 0$, d. h. es ist in B^* u' mit u identisch.

Subtrahieren wir nun die für B^* geltende Gleichung (76) und die entsprechende Gleichung für die gestrichenen Größen, indem wir $u' = u$ einsetzen, so folgt

$$(\lambda - \lambda')u + \sum_{\nu=1}^{l}(\mu_\nu - \mu_\nu')v_\nu = 0;$$

da aber die Funktionen $u, v_1, \ldots, v_l$ in B^* linear unabhängig sind, so ist $\lambda = \lambda'$, $\mu_\nu = \mu_\nu'$, und somit haben wir den gewünschten Nachweis erbracht.

Gehen wir in derselben Art von Rechteck zu Rechteck weiter, so gelangen wir zu einer überall im Innern von G analytischen, der Differentialgleichung (76) genügenden Funktion, von der wir nun zu zeigen haben, daß sie tatsächlich die gesuchte Lösung unseres Variationsproblems ist.

§ 11.

Die Eigenschaften der Grenzfunktion.

Wir haben zu diesem Zwecke nachzuweisen:

1. Daß u den Bedingungen

$$H[u] = 1, \quad H[u, v_\nu] = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, l)$$

genügt,

2. daß $D[u] = d$ ist, und

3. daß u die Randwerte Null besitzt.

Um die beiden ersten Punkte zu beweisen, beachten wir, daß für jedes im Innern eines der Rechtecke R liegende Teilgebiet B^* wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen φ_i und ihrer Ableitungen aus (72) und (73) die Gleichungen

$$\lim_{i=\infty} D_{B^*}[\varphi_i - u] = 0, \quad \lim_{i=\infty} H_{B^*}[\varphi_i - u] = 0$$

folgen. Da wir jedes ganz im Innern von G liegende Gebiet G^* durch eine endliche Anzahl sich lückenlos aneinanderschließender Gebiete B^* bedecken können, so folgt hieraus auch

$$\lim_{i=\infty} D_{G^*}[\varphi_i - u] = 0, \quad \lim_{i=\infty} H_{G^*}[\varphi_i - u] = 0.$$

Aus den Gleichungen (9), (10) des § 1 ergibt sich nun sofort für jedes solche Gebiet

$$\lim_{i=\infty} D_{G^*}[\varphi_i] - D_{G^*}[u] = 0, \quad \lim_{i=\infty} H_{G^*}[\varphi_i] - H_{G^*}[u] = 0.$$

Weiter gilt für das ganze Gebiet G $\lim\limits_{\substack{i=\infty \\ j=\infty}} D[\varphi_i - \varphi_j] = 0$, so daß dieser Ausdruck bei hinreichend großem i und j kleiner als eine beliebig kleine

positive Zahl ε wird; es ist also erst recht für alle solche i und j, gleichmäßig für alle Teilgebiete G^*, $D_{G^*}[\varphi_i - \varphi_j] < \varepsilon$, und hier können wir nach den obigen Ausführungen den Grenzübergang zu $j = \infty$ machen, so daß wir gleichmäßig für alle Teilgebiete G^* erhalten $D_{G^*}[\varphi_i - u] < \varepsilon$. Da hierin wieder G^* beliebig genau mit G zusammenfallend genommen werden kann, so folgt $D_G[\varphi_i - u] < \varepsilon$, und somit nach Gleichung (10) des § 1 $\lim\limits_{i=\infty} D[\varphi_i] - D[u] = 0$, d. h. wegen $\lim\limits_{i=\infty} D[\varphi_i] = d$

$$D[u] = d,$$

womit Punkt 2 erwiesen ist.

Ganz ebenso schließen wir bei Ersetzung des Zeichens D durch das Zeichen H, daß

$$\lim_{i=\infty} H[\varphi_i - u] = 0, \qquad H[u] = 1$$

wird. Aus

$$H[u, v_r]^2 = H[u - \varphi_i, v_r]^2 \leqq H[u - \varphi_i] \cdot H[v_r]$$

ergibt sich nun unmittelbar $H[u, v_r] = 0$; hiermit ist auch Punkt 1 bewiesen.

Um nun noch drittens zu zeigen, daß u die Randwerte Null besitzt, betrachten wir einen Punkt P in G, welcher vom Rande und zwar vom Randpunkt Q den kürzesten Abstand ε besitzt, und schlagen um P mit ε den Kreis C. Auf Grund von Gleichung (38), § 6 schließen wir

$$H_C[\varphi_i] \leqq 4\varepsilon^2 \cdot D_{\mathsf{K}}[\varphi_i] \cdot 4\pi^2,$$

wobei K das Teilgebiet von G ist, welches in einem Kreise mit dem Radius 2ε um den Randpunkt Q liegt, und hier dürfen wir dem Obigen zufolge den Grenzübergang für $i = \infty$ machen, indem wir einfach φ_i durch u ersetzen; wir haben also

$$H_C[u] \leqq 4\varepsilon^2 \cdot 4\pi^2 \cdot D_{\mathsf{K}}[u] < \varepsilon^2 \delta(\varepsilon),$$

wobei $\delta(\varepsilon)$ eine mit ε gegen Null konvergierende Größe ist.

Weiter setzen wir in C

$$\omega = \iint\limits_{(C)} K(\lambda r) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

wobei wieder $K(\lambda r)$ wie in § 7 die Besselsche Funktion zweiter Art des Argumentes $\lambda\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ ist, $f = \sum\limits_{r=1}^{s} \mu_r v_r$ gesetzt wird, und das Integral über die Kreisfläche C erstreckt werden soll. Nach § 7 gilt in C

$$\Delta\omega + \lambda\omega + f = 0.$$

Ferner wird überall in C

$$\omega^2 \leq \iint K(\lambda r)^2 f^2 d\xi\, d\eta \cdot \varepsilon^2 \pi < A^2 \cdot \varepsilon^2 \pi,$$

wo A eine für alle ε gleichzeitig wählbare Konstante ist; also wird

$$H_C[\omega] < A^2 \varepsilon^4 \cdot \pi^2.$$

Jedenfalls strebt also ω mit ε gleichmäßig gegen Null. Für die Differenz $\chi = u - \omega$ gilt weiter

$$H_C[\chi] = H_C[u] + H_C[\omega] - 2 H_C[u, \omega] < \varepsilon^2 \delta(\varepsilon) + \varepsilon^4 \pi^2 A^2 + 2 \varepsilon^3 \pi A \sqrt{\delta(\varepsilon)},$$

also ist auch

$$H_C[\chi] < \varepsilon^2 \delta'(\varepsilon),$$

wo $\delta'(\varepsilon)$ eine mit ε gegen Null strebende Größe ist.

Nun genügt χ der Differentialgleichung $\Delta \chi + \lambda \chi = 0$, und der Wert von χ im Punkte P wird nach dem schon in § 7 benutzten Mittelwertsatze durch die Gleichung

$$\chi \cdot \int_0^\varepsilon J(\lambda r)\, r\, dr = \iint_{(C)} \chi\, dx\, dy$$

gegeben, wo $J(\lambda r)$ wieder die nullte Besselsche Funktion von λr bedeutet. Also wird zufolge der Schwarzschen Ungleichung

$$\chi^2 \cdot \left(\int_0^\varepsilon J(\lambda r)\, r\, dr\right)^2 < \varepsilon^2 \pi \cdot \varepsilon^2 \delta'(\varepsilon),$$

und da wegen $J(0) = 1$ bei hinreichend kleinem ε

$$\int_0^\varepsilon J(\lambda r)\, r\, dr > \frac{1}{4} \varepsilon^2$$

ist, folgt sofort, daß χ mit ε gleichmäßig gegen Null konvergiert. Somit ist das gleiche auch für die Summe $u = \omega + \chi$ bewiesen.

Die Funktion u ist also eine Lösung unseres Variationsproblemes. Zur Lösung des ursprünglich in dieser Arbeit gestellten Eigenwertproblemes gelangen wir nun einfach durch *Spezialisierung der Funktionen v_ν*. Wir wollen annehmen, daß die Funktionen v_ν Differentialgleichungen der Form $\Delta v_\nu + \lambda_\nu v_\nu = 0$ genügen, die Randwerte Null haben, und endliche Integrale $D[v_\nu]$ besitzen (die übrigens dann notwendig gleich λ_ν sein müssen). Dann behaupten wir, daß auch u ebenso wie die v_ν eine Eigenfunktion unseres Problemes sein muß, d. h. daß die Werte μ_ν sämtlich verschwinden und die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ gilt. In der Tat brauchen wir nur die Differentialgleichung (76) mit v_ν zu multiplizieren und über G zu integrieren. Wegen (18) erhalten wir

$$\mu_\nu = - H[v_\nu, \Delta u].$$

Die rechte Seite dürfen wir auf Grund von § 6 nach der Greenschen Formel umformen und erhalten

$$\mu_\nu = -H[u, \Delta v_\nu],$$

und dieser Ausdruck wird wegen $\Delta v_\nu + \lambda_\nu v_\nu = 0$ und (16) Null. Ebenso finden wir nach Multiplikation von (76) mit u und Integration

$$D[u] = d = \lambda.$$

Wir haben damit das Eigenwertproblem der Differentialgleichung (1) gelöst. Die erste Eigenfunktion u_1 und den ersten Eigenwert λ_1 erhalten wir, indem wir $l = 0$ nehmen, d. h. gar keine Nebenbedingung der Form (16) stellen; der zweite Eigenwert λ_2 und die zweite Eigenfunktion u_2 ergeben sich, wenn wir $l = 1$ und $v_1 = u_1$ setzen; indem wir so sukzessive weitergehen, erhalten wir die unendliche Serie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, u_1, u_2, u_3, \ldots$ der Eigenwerte und Eigenfunktionen.

§ 12.
Vollständigkeit der Lösung.

Es bleibt nur noch zu zeigen, *daß die so definierten Eigenfunktionen ein vollständiges orthogonales Funktionensystem für G bilden.* Dies ergibt sich leicht aus dem Umstande, daß zufolge der Überlegungen von § 5 mit wachsendem p der Eigenwert λ_p über alle Grenzen wachsen muß; sonst würde nämlich wegen $\lambda_{p+1} \geqq \lambda_p$ der Grenzwert $\lim\limits_{p=\infty} \lambda_p = \lambda$ existieren, und daher würde in dem dort als Problem II bezeichneten Variationsproblem die untere Grenze des Ausdruckes $\mathfrak{D}[o]$ bei wachsendem p höchstens die Größenordnung p haben, wie man erkennt, wenn man $o' = u_1, o'' = u_2, \ldots, o^{(p)} = u_p$ einsetzt; diese untere Grenze muß aber, wie wir sahen, die Größenordnung p^2 haben.

Es sei nun ψ irgendeine in G stetige Funktion mit stückweise stetigen ersten Ableitungen, endlichem $D[\psi]$ und verschwindenden Randwerten; wir behaupten, daß, wenn $c_i = H[\psi, u_i]$ gesetzt wird, die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} H\left[\psi - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right] = 0 \tag{79}$$

gilt. Es ist nämlich

$$H\left[\psi - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right] = H[\psi] - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = a_n^2,$$

wo a_n^2 eine mit n monoton abnehmende Zahl ist; ist $a^2 = \lim\limits_{n=\infty} a_n^2$ positiv, so wird die Funktion

$$\varphi = \frac{1}{a_n}\left[\psi - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right]$$

den Bedingungen $H[\varphi]=1$, $H[\varphi, u_i]=0$ $(i=1,\ldots,n)$, $(l=n)$ des Variationsproblemes in § 3 genügen und am Rande verschwinden; es muß also $D[\varphi]\geqq\lambda_{n+1}$ sein. Andererseits ist, wie durch die erlaubte Anwendung der Greenschen Formel folgt,

$$a_n^2 D[\varphi]=D[\psi]+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i c_i^2-2\sum_{i=1}^{n}c_i D[\psi,u_i]=D[\psi]-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i c_i^2,$$

d. h. $a_n^2 D[\varphi]\leqq D[\psi]$ oder erst recht $a^2 D[\varphi]\leqq D[\psi]$, was bei hinreichend großem n in Widerspruch mit $D[\varphi]\geqq\lambda_{n+1}$ steht. Folglich ist $\lim\limits_{n=\infty} a_n^2=0$.

Mithin ist bewiesen, daß jede in G stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion ψ mit verschwindenden Randwerten und endlichem Integral $D[\psi]$ sich im Sinne des mittleren Fehlerquadrates beliebig genau durch ein lineares Aggregat der u_i approximieren läßt. Da man jede in G stetige Funktion ψ^* durch eine solche Funktion ψ im angegebenen Sinne beliebig genau approximieren kann, so ist damit die gleiche Eigenschaft für ψ^* bewiesen, und diese Eigenschaft bedeutet gerade die Vollständigkeit des Funktionensystemes der u_i.

Kapitel IV.

Die numerische Berechnung der Lösungen.

Aus den soeben durchgeführten Betrachtungen unseres Existenzbeweises, insbesondere den Ausführungen von Kapitel I, erhalten wir gleichzeitig die Mittel zu einer *wirklich numerischen Konstruktion* der gesuchten Lösung. Hierbei kommt es wesentlich darauf an, ein Verfahren zur numerischen Konstruktion der Minimalfolgen zu geben. Zu diesem Zwecke gehen wir mit W. Ritz[28]) von einem fest gewählten System von „Koordinatenfunktionen" $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ in G aus, welche folgende Eigenschaften besitzen: Alle Funktionen ω_i sind nebst ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung in G stetig und verschwinden am Rande; ist φ eine in G stetige, am Rande verschwindende Funktion mit stückweise stetigen ersten Ableitungen und endlichem Integral $D[\varphi]$, dann läßt sich eine lineare Kombination $\varphi^{(n)}=c_1\omega_1+c_2\omega_2+\ldots+c_n\omega_n$ von endlich vielen der Koordinatenfunktionen so finden, daß gleichzeitig $H[\varphi-\varphi^{(n)}]$ und $D[\varphi-\varphi^{(n)}]$ beliebig klein werden (Vollständigkeitseigenschaft). Solche Funktionen lassen sich grundsätzlich für jedes Gebiet in mannigfacher Weise angeben; im speziellen Falle besteht die praktische Aufgabe nicht zuletzt darin, mit dem richtigen Takt das Funktionensystem der ω_i so zu wählen, daß die Durchführung der numerischen Rechnung nicht allzu mühsam wird.

[28]) Vgl. loc. cit. [1]).

Setzen wir in unserem ursprünglichen Variationsproblem für φ eine Funktion $\varphi^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \omega_\nu$ mit noch unbestimmten Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ein, so geht das Variationsproblem in ein Minimumproblem der gewöhnlichen Differentialrechnung über; die Funktionen $\varphi^{(n)}$, welche durch Lösung dieses Minimumproblemes entstehen, müssen wegen der Vollständigkeit der ω_i mit wachsendem n eine Minimalfolge des Variationsproblemes bilden.

Wir wollen jedoch, indem wir uns auf das eigentliche Eigenwertproblem beschränken, zeigen, wie man durch eine kleine naheliegende Modifikation des Verfahrens mit einem Schlage zu *allen* Eigenwerten und Eigenfunktionen gelangen kann. Zu diesem Zwecke machen wir der bequemeren Schreibweise halber die sonst unwesentliche Voraussetzung, daß die Funktionen ω_i ein normiertes Orthogonalsystem bilden, d. h. den Beziehungen $H[\omega_i] = 1$, $H[\omega_i, \omega_j] = 0$ $(i \neq j)$ genügen. Wir setzen nun das Problem so an, als handelte es sich nur um die Berechnung des ersten Eigenwertes und der ersten Eigenfunktion, indem wir fordern

$$D[\varphi] = \text{Min},$$

während

$$H[\varphi] = 1$$

ist. Der Wert des Minimums ist, wie wir wissen, gleich λ_1. Setzen wir nun in $D[\varphi], H[\varphi]$ statt φ eine Funktion $\varphi^{(n)} = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n$ ein, so erhalten wir folgendes algebraische Problem:

Die quadratische Form

$$D_n = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} c_\nu c_\mu A_{\mu\nu} \qquad (A_{\mu\nu} = D[\omega_\nu, \omega_\mu])$$

soll durch geeignete Wahl der n Variablen c_i unter der Nebenbedingung

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 = 1 \tag{80}$$

zum Minimum gemacht werden. Hieraus folgt für die c_ν das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} c_k = \lambda c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{81}$$

wobei die Größe $\lambda = \lambda_1^{(n)}$ als die kleinste der durchweg positiven Wurzeln der Gleichung n-ten Grades

$$R_n(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda, & A_{12}, & \ldots, & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22} - \lambda, & \ldots, & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \ldots, & A_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{82}$$

bestimmt werden muß; der gesuchte Minimalwert von D_n ist gleich $\lambda_1^{(n)}$. Wir bezeichnen die Wurzeln der Gleichung (82), nach wachsender Größe geordnet, mit $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \lambda_3^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)}$; dann lassen sich die Gleichungen (81) für $\lambda = \lambda_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ durch ein Wertsystem $c_{1,i}, c_{2,i}, \ldots, c_{n,i}$ erfüllen, wobei die $c_{h,i}$ ein orthogonales Zahlenschema bilden, d. h. den Relationen

$$(83) \qquad \sum_{h=1}^{n} c_{h,i}^2 = 1, \qquad \sum_{h=1}^{n} c_{h,i} c_{h,j} = 0 \qquad (i \neq j)$$

genügen.

Wir setzen

$$(84) \qquad \varphi_i^{(n)} = \sum_{h=1}^{n} c_{h,i}^{(n)} \omega_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und behaupten dann folgenden Satz: *Ist $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ das vollständige System der nach der Größe geordneten Eigenwerte, $u_1, u_2, u_3, \ldots$ das entsprechende vollständige System der Eigenfunktionen unseres Differentialgleichungsproblemes, so wird zunächst*

$$(85) \qquad \lim_{n=\infty} \lambda_i^{(n)} = \lambda_i;$$

ferner wird, wenn λ_i ein einfacher Eigenwert der Differentialgleichung ist, bei geeigneter Wahl des Vorzeichens von $\varphi_i^{(n)}$

$$(86) \qquad \lim_{n=\infty} H[\varphi_i^{(n)} - u_i] = 0, \qquad \lim_{n=\infty} D[\varphi_i^{(n)} - u_i] = 0;$$

ist $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \ldots = \lambda_{i+r-1}$ ein r-facher Eigenwert, so gelten ebenfalls Gleichungen

$$(87) \quad \lim_{n=\infty} H[\psi_j^{(n)} - u_j] = 0, \quad \lim_{n=\infty} D[\psi_j^{(n)} - u_j] = 0 \quad (j = i, i+1, \ldots, i+r-1),$$

wobei die $\psi_j^{(n)}$ aus den $\varphi_i^{(n)}, \varphi_{i+1}^{(n)}, \ldots, \varphi_{i+r-1}^{(n)}$ durch eine geeignete orthogonale Substitution hervorgehen[27]).

Der Beweis dieser Behauptungen, welche eine Rechtfertigung des nach Ritz genannten Verfahrens für unser Problem darstellen, folgt sehr leicht auf Grund der Untersuchungen von Kapitel I. Seien zunächst $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{i-1}$ einfache Eigenwerte, dann müssen ersichtlich alle zugehörigen Minimalfolgen die asymptotische Dimensionszahl 1 haben; denn sonst würden wir auf Grund von Kapitel I und III sofort mehrere zueinander orthogonale Eigenfunktionen für einen Eigenwert erhalten. Wir betrachten zuerst λ_1,

---

[27]) Man vergleiche zu diesem Satze eine schon am 15. 12. 1919 vorgelegte Note von M. Plancherel in den Comptes Rendus, wo ohne Beweis ein ganz analoges Resultat ausgesprochen wird; die Formulierung bei Herrn Plancherel scheint mir übrigens im Falle mehrfacher Eigenwerte eine kleine Ungenauigkeit zu enthalten.

der ja stets ein einfacher Eigenwert sein muß. Daß die Werte $\lambda_1^{(n)}$ bei zunehmendem n gegen λ_1 konvergieren müssen, ist wegen der Vollständigkeitseigenschaften der ω_i offenbar; denn man kann $D[\varphi_n]$ bei hinreichend großem n stets unter Innehaltung der Bedingung $H[\varphi_n]=1$ beliebig nahe an die untere Grenze λ der Werte $D[\varphi]$ bringen. Also bilden die Funktionen $\varphi_1^{(n)}$ eine Minimalfolge des Variationsproblemes aus § 3 für $l=0$, und es ergibt sich bei geeigneter Vorzeichenwahl nach § 5 direkt

$$\text{(86a)} \qquad \lim_{n=\infty} H[\varphi_1^{(n)}-u_1]=0, \qquad \lim_{n=\infty} D[\varphi_1^{(n)}-u_1]=0.$$

Um nun zu beweisen, daß auch

$$\text{(85a)} \qquad \lim_{n=\infty} \lambda_2^{(n)}=\lambda_2$$

ist, beachten wir, daß die Funktion $\varphi_2^{(n)}$ das Minimum von D_n unter der Nebenbedingung $H[\varphi^{(n)}]=1$, sowie der weiteren Bedingung $H[\varphi^{(n)}, \varphi_1^{(n)}]=0$ liefert. Nehmen wir nun an, in der Entwicklung von u_1 nach den ω_i sei der erste Entwicklungskoeffizient $H[u_1, \omega_1]$ nicht Null (gleichviel ob diese Entwicklung konvergiert oder nicht, so läßt sich dies jedenfalls durch Umnumerieren stets erreichen), dann können wir uns aus jeder der Gleichung $H[\varphi^{(n)}, \varphi_1^{(n)}]=0$ genügenden Funktion $\varphi^{(n)}$ durch Addition einer Funktion der Form $a_1 . \omega_1$ sofort eine Funktion $\overline{\varphi^{(n)}}$ herstellen, welche der Bedingung $H[\overline{\varphi^{(n)}}, u_1]=0$ genügt. Hierbei bedeutet, wie festgesetzt, der obere Index n, daß die betreffenden Funktionen lineare Kombinationen der n ersten Funktionen ω_i sind.

Wegen der Gleichung (85) ist $H[\varphi_1^{(n)}, \omega_1]$ bei hinreichend großem n beliebig wenig von $H[u_1, \omega_1]$ verschieden, und daher wird bei hinreichend großem n sich a_1 beliebig wenig von Null, $H[\overline{\varphi^{n}}]$ beliebig wenig von $H[\varphi^{(n)}]$ und $D[\overline{\varphi^{(n)}}]$ beliebig wenig von $D[\varphi^{(n)}]$ unterscheiden; indem wir die Funktion $\overline{\varphi^{(n)}}$ mit einem, bei hinreichend großem n von 1 beliebig wenig verschiedenen Faktor multiplizieren, erhalten wir eine Funktion $\widetilde{\varphi^{(n)}}$, welche noch der Bedingung $H[\widetilde{\varphi^{(n)}}]=1$ genügt.

Genau den entsprechenden Übergang können wir in umgekehrter Richtung machen, indem wir von einer Funktion, welche der Gleichung $H[\varphi^{(n)}, u_1]=0$ genügt, zu einer andern $\widetilde{\varphi^{(n)}}$ übergehen, welche die Bedingung $H[\widetilde{\varphi^{(n)}}, \varphi_1^{(n)}]=0$ befriedigt. Aus der Vollständigkeit des Funktionensystemes der ω_i ergibt sich nun sofort, daß die Funktionen $\widetilde{\varphi_2^{(h)}}$ $(h=2, 3, 4, \ldots)$ eine Minimalfolge des ursprünglichen Variationsproblems für $n=1$, $v_1=u_1$ bilden; denn man kann infolge der Vollständigkeitseigenschaft gewiß eine Minimalfolge der Gestalt $\varphi^{(h)}$ $(h=2, 3, 4, \ldots)$ zugrunde legen, und nach dem eben Ausgeführten bei beliebig geringer Veränderung des Wertes

von $D[\varphi^{(h)}]$ zu einer der Bedingung $H[\widetilde{\varphi^{(h)}}, \varphi_1^{(h)}] = 0$ genügenden Funktion übergehen; für die Funktion $\varphi_2^{(h)}$ wird aber $\lambda_2^{(h)} = D[\varphi_2^{(h)}] \leqq D[\widetilde{\varphi^{(h)}}]$; ebenso schließt man in umgekehrter Richtung. Hieraus folgt unmittelbar, daß wirklich $\lim\limits_{h=\infty} \lambda_2^{(h)} = \lambda_2$ ist, und daß die Funktionen $\varphi_2^{(h)}$ $(h = 2, 3, \ldots)$ wenigstens im erweiterten Sinne eine Minimalfolge des Variationsproblems bilden. Ist λ_2 ein einfacher Eigenwert der Differentialgleichung, so können wir wiederum schließen, daß diese Minimalfolge die Dimensionszahl 1 hat, woraus wir die Gültigkeit von (85), (86) für $i = 2$ entnehmen dürfen.

In derselben Weise können wir fortfahren, solange es sich um einfache Eigenwerte handelt. Ist dagegen λ_i ein r-facher Eigenwert, so betrachten wir das Variationsproblem II aus Kap. I § 5, indem wir $l = i - 1$, $p = r$ nehmen und $v_1 = u_1, \ldots, v_l = u_l$ setzen. Die untere Grenze bei diesem Variationsproblem, bzw. das wirklich angenommene Minimum ist gleich $r \cdot \lambda_i$; andererseits bilden, wie genau nach dem obigen Muster folgt, die Funktionensysteme $\varphi_i^{(h)}, \varphi_{i+1}^{(h)}, \ldots, \varphi_{i+r-1}^{(h)}$ $(h = i + r, i + r - 1, \ldots)$ eine Minimalfolge im weiteren Sinne von Funktionensystemen für das Problem II; hieraus folgt wie oben, daß die Summe $\lambda_i^{(h)} + \lambda_{i+1}^{(h)} + \ldots + \lambda_{i+r-1}^{(h)}$ gegen $r\lambda_i$ konvergieren muß; da nun genau wie oben sich $\lim\limits_{h=\infty} \lambda_i^{(h)} = \lambda_i$ ergibt, andererseits $\lambda_{i+1}^{(h)} \geqq \lambda_i^{(h)}$ ist, so wird $\lim\limits_{h=\infty} \lambda_{i+1}^{(h)} = \lambda_i, \ldots, \lim\limits_{h=\infty} \lambda_{i+r-1}^{(h)} = \lambda_i$. Die Funktionen $\varphi_i^{(h)}, \ldots, \varphi_{i+r-1}^{(h)}$ $(h = i + r, i + r + 1, \ldots)$ bilden eine Funktionsfolge der Dimensionszahl r; da es keine Minimalfolge der Dimensionszahl $r + 1$ geben kann, wenn der Eigenwert λ_i, wie wir annehmen wollen, nicht eine größere Vielfachheit als r besitzt, so folgt aus § 5 unmittelbar die in den Gleichungen (87) ausgesprochene Behauptung.

Hiermit ist für das Ritzsche Verfahren, soweit es sich um die Eigenfunktionen handelt, keineswegs die Konvergenz im üblichen Sinne, sondern nur die viel weniger besagende *„mittlere Konvergenz“* nachgewiesen; in der Tat kann man nicht mehr erwarten, wenigstens nicht, wenn man keine weiteren einschränkenden Bedingungen über die Funktionen ω_i stellt.

Man kann jedoch folgendermaßen in einfacher Weise von den Funktionen $\varphi_i^{(h)}$ *zu Funktionen* $\chi_i^{(h)}$ *gelangen, welche selbst gegen die betreffenden Eigenfunktionen konvergieren, und kann sogar zugleich Entsprechendes noch für die ersten Ableitungen erreichen*: Es sei R eine Zahl, für welche $\int\limits_0^R J(\lambda_i^{(h)} r)\, r\, dr = a_i^{(h)}$ bei wachsendem h oberhalb einer festen positiven Schranke bleibt, die ihrerseits ebenso wie R beliebig klein genommen werden kann; es sei P ein Punkt in G, der vom Rande einen Abstand größer als R hat, K_R der um P mit dem Radius R geschlagene Kreis;

dann konvergieren mit wachsendem h die Funktionen $\frac{1}{a_i^{(h)}} \iint\limits_{(K_R)} \varphi_i^{(h)}\, dx\, dy = \chi_i^{(h)}$ sowie die Funktionen $\frac{1}{a_i^{(h)}} \iint\limits_{(K_R)} \frac{\partial \varphi_i^{(h)}}{\partial x}\, dx\, dy$ und $\frac{1}{a_i^{(h)}} \iint\limits_{(K_R)} \frac{\partial \varphi_i^{(h)}}{\partial y}\, dx\, dy$ in dem so definierten Teilgebiete gleichmäßig gegen u_i bzw. $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ und $\frac{\partial u_i}{\partial y}$; gegebenenfalls ist hierbei die Funktion $\varphi_i^{(h)}$ durch $\psi_i^{(h)}$ zu ersetzen.

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Mittelwertsatz; es ist danach z. B.

$$u_i \cdot a_i = u_i \int\limits_0^R r J(\lambda_i r)\, dr = \iint\limits_{(K_R)} u_i\, dx\, dy,$$

woraus sich

$$(u_i a_i - \chi_i a_i^{(h)})^2 \leqq H_{K_R}[u_i - \varphi_i^{(h)}] \cdot R^2 \pi$$

ergibt. Analog schließt man für die Ableitungen, indem man das Zeichen H durch D ersetzt. Natürlich wird man in der numerischen Rechnung a_i statt $a_i^{(h)}$ nehmen.

Will man höhere Ableitungen der u_i aus den entsprechenden Ableitungen der $\varphi_i^{(h)}$ approximativ berechnen, so muß man den hier angewandten Prozeß der Mittelbildung entsprechend öfter anwenden.

Wie man aus den voranstehenden Ausführungen leicht entnehmen kann, enthalten diese auch die Hilfsmittel für eine Abschätzung der Fehler bei der numerischen Rechnung, doch kann darauf hier nicht weiter eingegangen werden. Es sei nur noch bemerkt, daß man sich leicht von der Beziehung $\lambda_i^{(h+1)} \leqq \lambda_i^{(h)}$ überzeugt[28]), was für die Praxis eine nützliche Handhabe geben mag.

---

[28]) Diese folgt sofort aus der Maximum-Minimum-Definition der Werte $\lambda_i^{(h)}$ und dem Umstand, daß die quadratische Form D_h aus D_{h+1} hervorgeht, indem wir für die Variable c_{h+1} die Bedingung $c_{h+1} = 0$ stellen.

(Eingegangen am 28. 10. 1921.)

Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken.

Vierzehnter Bericht[1]).

Von

F. Klein in Göttingen.

Während der Zeit, die seit dem Erscheinen des dreizehnten Berichts verstrichen ist, hat die Gaußforschung und mit ihr das Unternehmen der Gaußausgabe durch das Ableben von Paul Stäckel einen unersetzlichen Verlust erlitten. Wie Stäckel als einer der ersten in Deutschland die Geschichte der neueren Mathematik überhaupt auf die Stufe exakter wissenschaftlicher Forschung gehoben hat, so hat er auch die Gaußforschung in neue Wege geleitet und seinen erstaunlichen geschichtlichen Sinn in ihre Dienste gestellt. Diesem Sinne verdankte er auch das Glück, das ihn zur Entdeckung so mancher verborgenen Schätze führte, unter denen als der wertvollste hier nur das Gaußsche Tagebuch besonders erwähnt werden möge. Seine Arbeit am VIII. Bande der Werke, bei der besonders die Feststellung von Gauß' Anteil an der Entdeckung der Nichteuklidischen Geometrie hervorzuheben ist, wurde für alle folgenden Bände vorbildlich, und Stäckel hat bei der Herausgabe aller dieser Bände (VII, IX, X, 1 und XI, 1) nicht allein durch seine Mitwirkung an der Aufstellung der Redaktionspläne, sondern auch durch hingebende und selbstlose Hilfe im Einzelnen den andern Mitarbeitern unschätzbare Dienste geleistet. Wir können dem Geschick nicht genug dafür danken, daß es ihm vergönnt war, noch kurze Zeit vor seinem Ableben seinen Essay über Gauß als Geometer zum Abschluß zu bringen, ein Werk, das sowohl seinem Inhalt als auch seiner vollendeten Form nach ein kaum zu übertreffendes Muster historisch-mathematischer Darstellung genannt werden kann. — Für den

---

[1]) Abgedruckt aus den Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Geschäftliche Mitteilungen 1921. — Vgl. den dreizehnten Bericht Math. Ann. 80, S. 82–84.

von ihm übernommenen Essay über Gauß als Mitglied der Universität und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen hat sich in seinem Nachlaß eine wertvolle Sammlung von Material vorgefunden, die uns Frau Geheimrätin Stäckel in dankenswerter Weise zur Verfügung gestellt hat; es wird eine wichtige Aufgabe der Redaktion sein, die Bearbeitung dieses Essays mit Benutzung des von Stäckel gesammelten Materials in seinem Sinne zur Durchführung zu bringen. — Sein Name wird für immer mit der Herausgabe der Werke von Gauß unlöslich verbunden bleiben.

Hemmnisse von außen und innen haben sich bisher der Fertigstellung des im Druck befindlichen Bandes XI, 1 entgegengestellt. Neben den Nachträgen zur Physik (Schäfer) und zur Chronologie (Loewy) sind noch die zur theoretischen Astronomie (Brendel) fertig gedruckt; es fehlt nur noch die praktische und stellare Astronomie (Brendel) und die Abteilung Varia (Schlesinger). In der praktischen Astronomie interessiert besonders der Meinungsaustausch zwischen Gauß und Bessel über die Fundamentalbeobachtungen am Meridiankreise, unter den Varia möge neben den schon im 13. Bericht genannten Stücken eine Notiz über die Bestimmung des Flächeninhalts eines ebenen Polygons erwähnt werden (veröffentlicht von H. Schumacher in den Zusätzen zu seiner Übersetzung von Carnots Geometrie der Stellung, 1810), die in Verbindung mit der im Bande X, 1, S. 142, [8] wiedergegebenen Aufzeichnung aus dem Jahre 1796 die Bemerkungen bestätigt, die Gauß in seinem Briefe an Olbers vom 30. Oktober 1825 (Werke VIII, S. 398) in bezug auf A. L. F. Meister und dessen Abhandlung Generalia de genesi figurarum planarum etc. vom Jahre 1771 macht.

Von den „Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß" sind die Hefte VII, Über die astronomischen Arbeiten von Gauß, I. Abschnitt, Theoretische Astronomie von M. Brendel, und VIII, Zahlbegriff und Algebra bei Gauß, I. Teil, von A. Fraenkel, mit einem Anhang von A. Ostrowski, Zum ersten und vierten Gaußschen Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra, erschienen.

Es ist ferner zu berichten, daß sich im Archiv der Dänischen Gradmessung zu Kopenhagen, bei Gelegenheit einer durch deren Direktor, Kaptein Dr. Buchwald, unter Mitwirkuug von Dr. Pál vorgenommenen Neuordnung, eine Reihe von Briefen von Gauß an Schumacher gefunden hat. Es sind dies zunächst die Briefe vom 22. 12. 27 (abgedruckt im Briefwechsel Gauß-Schumacher, Band II, S. 141—145), vom 7. 1. 28 (abgedruckt ebenda, S. 145—150), vom 28. 1. 28 (abgedruckt ebenda, S. 152 bis 155), vom 17. 5. 31 (abgedruckt ebenda, S. 258—261) und vom 25. 6. 31 (abgedruckt ebenda, S. 263—266). Von diesen Briefen besitzt das Gauß-

archiv Abschriften, anscheinend von der Hand des Herausgebers des Briefwechsels Gauß-Schumacher, C. A. F. Peters. Des weitern ist in Kopenhagen der Brief vom 28. 11. 24 (abgedruckt ebenda, S. 1—4), von dem eine Abschrift im Gaußarchiv nicht vorhanden ist, und von dem Briefe vom 10. 12. 27 (abgedruckt ebenda, S. 135—139) der erste Teil (im Abdruck S. 135—137, Zeile 10, endend mit dem Worte „subtrahieren"), während die Urschrift des zweiten Teils (S. 137—139 des Abdrucks) sich im Gaußarchiv befindet. Endlich aber besitzt die Dänische Gradmessung noch einen Brief vom 23. 6. 25 und einen undatierten Brief, die beide im Abdruck fehlen und von denen das Gaußarchiv auch keine Abschriften besitzt. Der Brief vom 23. 6. 25 beginnt mit den Worten: „Zu meinem Verdruße bemerke ich erst jetzt, ... daß ich Ihnen die Richtung ... ganz unrichtig angegeben habe ...", er ist also wohl die Antwort auf Schumachers Brief Nr. 253 vom 20. 6. 25 und würde im Briefwechsel zwischen diesen und Gauß' Brief Nr. 254 zu setzen sein. Der undatierte Brief enthält 1. Mitteilungen über die Entzifferung einer Armbandinschrift (vgl. Briefwechsel Bd. II, die Nrn. 370, 371, 372, 376), 2. Erkundigung über Duncker (vgl. ebenda Nr. 376), 3. Bestätigung des Empfangs eines Mikroskops (vgl. ebenda Nrn. 371, 372, 373), 4. Mitteilungen über Methoden für geodätische Messungen (vgl. ebenda Nr. 373). Die Vergleichung mit den Briefen Nrn. 371—376 des Abdrucks zeigt, daß dieser undatierte Brief am 21. oder 22. Januar 1830 in Schumachers Hände gelangt ist. Das fragliche Mikroskop sollte zur Beobachtung der damals neu entdeckten Brownschen Bewegungen dienen und wird von Schumacher in dem Briefe Nr. 371 genau beschrieben. Durch die Güte des Direktors der Dänischen Gradmessung sind uns vortreffliche photographische Nachbildungen aller dieser Briefe zum Geschenk gemacht worden. Die noch nicht gedruckten sollen in Bd. XI, 1 unter den Varia veröffentlicht werden.

Nach einer Mitteilung von Professor Loria in Genua befindet sich auch in Rom in der Bibliothek der Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri im Nachlasse Cremonas ein Gaußmanuskript. Es ist ein Blättchen mit einem Beispiel geodätischer Messungen, das Gauß in einer Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate an seine Zuhörer verteilt hat und das Enneper gelegentlich Cremona als Geschenk übersandt hatte. Durch freundliche Vermittlung von Professor T. Levi-Civita in Rom haben wir auch von dieser Handschrift eine schöne photographische Nachbildung erhalten.

(Eingegangen am 29. 9. 1921.)